

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

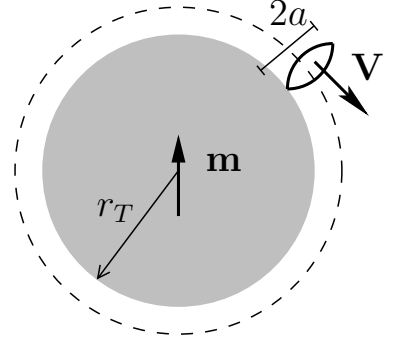
Compito di Fisica 2 (09/05/2023)

1

Su un satellite che compie un'orbita polare bassa ad altezza costante $h \ll r_T \simeq 6400$ km) è montata un'antenna circolare di raggio $a = 10$ m e sezione $s = 10^{-4}$ m², costituita da rame ($\rho \simeq 1.7 \times 10^{-8}$ Ω m) posta perpendicolarmente alla velocità $\mathbf{V}$ del satellite. Il campo magnetico terrestre è schematizzabile come generato da un dipolo al centro della Terra e vale $B_0 \simeq 3 \times 10^{-5}$ T all'equatore.

Cacolare e stimare numericamente (usando $V \simeq 8 \times 10^3$ m/s il cui calcolo è facoltativo),

- a) la f.e.m. indotta nell'antenna in funzione del tempo,
- b) la potenza dissipata nell'antenna e la forza esercitata su di essa dal campo magnetico terrestre.



2

Un elettrone atomico legato è descritto dall'equazione classica del moto

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_e}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\omega_0^2 \mathbf{r}_e - \nu \mathbf{v}_e - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}). \quad (1)$$

Sull'elettrone incide un'onda EM monocromatica con campo elettrico trasversale

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{ikx - i\omega t}). \quad (2)$$

Trascurando il campo magnetico, la soluzione della (1) è

$$\mathbf{r}_e(t) = \text{Re}(\mathbf{r}_0 e^{ikx - i\omega t}), \quad \mathbf{r}_0 = \frac{e\mathbf{E}_0/m_e}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu} \quad (3)$$

a) Si determini un'espressione per ν assumendo che, a regime e in media sul periodo di oscillazione, la potenza diffusa per irraggiamento P_d sia uguale alla potenza meccanica P_m sviluppata dalla forza sull'elettrone.

b) Si utilizzi la (3) per valutare la forza magnetica media come

$$\mathbf{F}_m = \langle \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \rangle \quad (4)$$

e si calcoli il rapporto $P_m/|\mathbf{F}|$.

c) Si stimi $|\mathbf{F}|$ in risonanza ($\omega = \omega_0$) assumendo $\nu \simeq 10^7$ s⁻¹ e un'intensità dell'onda incidente $I = 10^8$ W m⁻². Quando vale la forza corrispondente su una mole di atomi?

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} , \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \quad (5)$$

$$r_c = k_0 \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{ m} . \quad (6)$$

Numero di Avogadro

$$N_A = 6 \times 10^{23} . \quad (7)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (8)$$

Definizione di forza elettromotrice (f.e.m.) in un circuito

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{B}) , \quad (9)$$

dove l'integrale di linea è eseguito sul circuito, $\mathbf{V}$ è la velocità locale dell'elemento di circuito e Φ è il flusso del campo magnetico che attraversa il circuito.

Campo generato da un dipolo magnetico statico a distanza $\mathbf{r}$ dal dipolo stesso

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} . \quad (10)$$

In coordinate polari (con asse lungo $\mathbf{m}$)

$$m_r = \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2m \cos \theta , \quad m_\theta = \mathbf{m} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\mu_0}{4\pi} m \sin \theta . \quad (11)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (12)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (13)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (14)$$

SOLUZIONI

1

a) Poiché la spira rimane parallela a $\hat{\mathbf{r}}$ e perpendicolare a $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso essa è $\Phi(\mathbf{B}) \simeq B_\theta \pi a^2$. Per un campo di dipolo

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{m}}{r^3}, \quad B_\theta = \mathbf{B} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mu_0 \frac{m}{r^3} \sin \theta = B_0 \frac{r_T^3}{r^3} \sin \theta, \quad (15)$$

essendo $\mathbf{m} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = -m \sin \theta$ e $B_\theta(r = r_T, \theta = \pi/2) = B_0$. Sull'orbita ($r \simeq r_T, \theta = Vt$) si può scrivere

$$B_\theta(t) \simeq -B_0 \sin \left(\frac{Vt}{r_T} \right). \quad (16)$$

La velocità è $V \simeq (r_T g)^{1/2} \simeq 8 \times 10^3$ m/s. Otteniamo per la f.e.m.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}(\pi a^2 B_\theta(t)) = \pi a^2 B_0 \frac{V}{r_T} \cos \left(\frac{Vt}{r_T} \right). \quad (17)$$

b) La potenza dissipata nella spira

$$P_d = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{(\pi a^2 B_0 V)^2}{R r_T^2} \cos^2 \left(\frac{Vt}{r_T} \right), \quad (18)$$

con $R \simeq \rho \times 2\pi a/s \simeq 5 \times 10^{-3} \Omega$. Questa potenza deve essere fornita da un motore che esercita la forza $\mathbf{F}$ tale che $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = P_d$. Se $\mathbf{V}$ è costante si deve avere $\mathbf{F} + \mathbf{F}_B = 0$ con $\mathbf{F}_B$ la forza esercitata dal campo magnetico. Si ha allora

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = -P_d \quad (19)$$

con $\mathbf{F}$ parallela a $\mathbf{V}$ per questioni di simmetria. In media sul periodo dell'orbita si ha allora

$$\mathbf{F} \simeq -\frac{(\pi a^2 B_0)^2}{2R r_T^2} \mathbf{V}, \quad (20)$$

essendo il valor medio di $\cos^2(Vt/r_T) = 1/2$.

2

a) Essendo $\mathbf{p} = -e\hat{\mathbf{r}}_e$ il momento di dipolo dell'elettrone, la potenza irraggiata vale

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{2k_0}{3c^3} e^2 \omega^4 |\mathbf{r}_0|^2 = \frac{k_0 e^4}{3m_e^2 c^3} |\mathbf{E}_0|^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2 \omega^2}. \quad (21)$$

La potenza meccanica è il lavoro fatto per unità di tempo dalla forza di Lorentz, ovvero dalla forza elettrica:

$$\begin{aligned} P_m = \langle -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_e \rangle &= -\frac{1}{2} e \text{Re}(-i\omega \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e} |\mathbf{E}_0|^2 \text{Re} \left(\frac{-i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e} |\mathbf{E}_0|^2 \frac{\omega^2 \nu}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2 \omega^2} - \end{aligned} \quad (22)$$

Confrontando le espressioni si ricava

$$\nu = \frac{2k_0 e^2 \omega^2}{3m_e c^3} = \frac{2r_c}{3c} \omega^2 . \quad (23)$$

Il valore di $\nu \simeq 10^7 \text{ s}^{-1}$ corrisponde a $\omega \simeq 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

b) La forza magnetica mediata sul periodo è

$$\langle -e\mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \rangle = -\frac{1}{2}e\text{Re}(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0^*) = -\frac{1}{2}e\text{Re}\left(v_0 \frac{E_0^*}{c}\right) \hat{\mathbf{x}} = \frac{P_m}{c} \hat{\mathbf{x}} = \frac{P_d}{c} \hat{\mathbf{x}} , \quad (24)$$

avendo usato $B_0 = E_0/c$ per un'onda EM nel vuoto.

c) Posto $I = \varepsilon_0 c |\mathbf{E}_0|^2 / 2$ si ha

$$F_m(\omega = \omega_0) = \left. \frac{P_m}{c} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e \nu} |\mathbf{E}_0|^2 = 4\pi \frac{r_c I}{\nu} \simeq 2.5 \times 10^{-13} \text{ N} \simeq 1.5 \times 10^{11} \text{ N/mole} . \quad (25)$$