

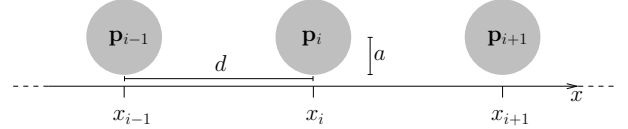
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (29/05/2023)

1

Si consideri una catena unidimensionale di nanosfere identiche, aventi raggio a e poste lungo l'asse x nelle posizioni $x_i = id$ (i intero) con spaziatura uniforme $d \gg a$, e polarizzabilità α (ovvero in un campo uniforme $\mathbf{E}_i$ il momento di dipolo $\mathbf{p}_i = \alpha \mathbf{E}_i$). Nel seguito si considerino i due casi di dipoli sia paralleli che perpendicolari all'asse x e si risponda giustificando eventuali approssimazioni fatte.



a) Considerando solo l'interazione tra primi vicini, mostrare la seguente relazione tra i momenti di dipolo delle nanosfere

$$\mathbf{p}_i = \frac{k_0 \alpha}{d^3} [3(\mathbf{p}_{i-1} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_{i-1} + 3(\mathbf{p}_{i+1} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_{i+1}] = \begin{cases} \frac{2k_0 \alpha}{d^3}(\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}) & (\mathbf{p}_i \parallel \hat{\mathbf{x}}) \\ -\frac{k_0 \alpha}{d^3}(\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}) & (\mathbf{p}_i \perp \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} \quad (1)$$

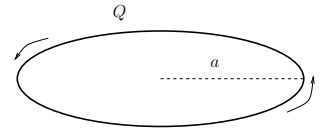
b) Si assuma adesso che $\mathbf{p}_i = \bar{\mathbf{p}} e^{ikx_i - i\omega t}$ con $\bar{\mathbf{p}}$ parallelo o perpendicolare ad x , e $2\pi c/\omega \gg d$. Si mostri che

$$1 = \frac{2\alpha}{d^3} \begin{cases} 2 \cos kd & (\mathbf{p}_i \parallel \hat{\mathbf{x}}) \\ -\cos kd & (\mathbf{p}_i \perp \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} \quad (2)$$

c) Se le nanosfere sono costituite da un metallo semplice di permittività $\varepsilon_r = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, determinare α e calcolare la relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ individuando per quali intervalli di frequenza la propagazione è possibile (ci si restringa all'intervallo $0 < k < \pi/d$, giustificando perché).

2

Su un anello isolante di raggio a è depositata una carica Q uniformemente distribuita con densità lineare $\ell = Q/2\pi a$. Per $t > 0$ si pone l'anello in rotazione intorno al proprio asse mantenendo una velocità angolare $\omega = \omega(t)$. Supposto noto il coefficiente di autoinduzione L di una spira circolare di raggio a , calcolare in funzione di $\omega(t)$



a) il campo elettrico indotto sull'anello,

b) il momento delle forze elettriche sull'anello.

c) Se l'anello ha momento di inerzia $\mathcal{I}$ e si applica per $t > 0$ un momento meccanico costante τ_m , determinare $\omega = \omega(t)$ con la condizione iniziale $\omega(0) = 0$.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Campo elettrico interno a una sfera dielettrica con permittività ε_r in campo elettrico esterno $\mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r + 2} . \quad (4)$$

Definizione di permittività dielettrica ε_r per un mezzo lineare

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} , \quad \varepsilon_r = 1 + \chi , \quad \varepsilon_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (5)$$

Campo generato da un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ statico a distanza $\mathbf{r}$

$$\mathbf{E}_p = \frac{k_0}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] . \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Applicando la formula data per il campo di dipolo statico e prendendolo uniforme dato che $d \gg a$

$$\mathbf{E}_i \simeq k_0 \frac{3(\mathbf{p}_{i-1} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_{i-1}}{d^3} + k_0 \frac{3(\mathbf{p}_{i+1} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_{i+1}}{d^3} . \quad (7)$$

Nel caso trasverso $\mathbf{p}_{i-1} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$, nel caso longitudinale $(\mathbf{p}_{i-1} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}_{i-1}$.

b) Usando $\mathbf{p}_i = \alpha \mathbf{E}_i$ abbiamo la relazione ricorsiva

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \alpha \mathbf{E}_i = \frac{\alpha}{d^3} [3(\mathbf{p}_{i-1} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_{i-1} + 3(\mathbf{p}_{i+1} \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_{i+1}] \\ &= \begin{cases} \frac{2k_0\alpha}{d^3}(\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}) & (\mathbf{p}_i \parallel \hat{\mathbf{x}}) \\ -\frac{k_0\alpha}{d^3}(\mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i+1}) & (\mathbf{p}_i \perp \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

Inserendo l'espressione $\mathbf{p}_i = \bar{\mathbf{p}} e^{ikx_i - i\omega t}$ ed eliminando poi il fattore comune si ottiene

$$1 = \frac{2k_0\alpha}{d^3} \begin{cases} 2 \cos kd & (\mathbf{p}_i \parallel \hat{\mathbf{x}}) \\ -\cos kd & (\mathbf{p}_i \perp \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} . \quad (9)$$

c) Se $2\pi c/\omega \gg d$ si può considerare che ogni sfera si trova nel campo vicino generato dalle altre sfere, e che questo campo sia uniforme e valga quindi l'espressione elettrostatica

$$\mathbf{p}_i = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r + 2} V \mathbf{E}_i = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \mathbf{E}_i \equiv \alpha \mathbf{E}_i , \quad (10)$$

dove $V = (4\pi a^3/3)$. Quindi otteniamo la relazione di dispersione

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2}{3} \left(1 - \frac{2a^3}{3d^3} \begin{cases} 2 \cos kd & (\mathbf{p}_i \parallel \hat{\mathbf{x}}) \\ -\cos kd & (\mathbf{p}_i \perp \hat{\mathbf{x}}) \end{cases} \right) \quad (11)$$

Gli intervalli di frequenza sono determinati dai valori massimo e minimo di $\cos kd$, ovvero $\cos(kd = 0) = 1$ e $\cos(kd = \pi/2) = 0$. Se $\mathbf{p}_i \parallel \hat{\mathbf{x}}$, si ha $(\omega_p^2/3)(1 - 4a^3/3d^3) < \omega^2 < \omega_p^2/3$. Se $\mathbf{p}_i \perp \hat{\mathbf{x}}$, si ha $\omega_p^2/3 < \omega^2 < (\omega_p^2/3)(1 + 2a^3/3d^3)$.

2

a) L'anello rotante è equivalente a una spira circolare con corrente

$$I = \frac{\omega}{2\pi} Q . \quad (12)$$

Il flusso del campo magnetico autogenerato attraverso l'anello è

$$\Phi(\mathbf{B}) = LI . \quad (13)$$

Per la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico ha linee di forze circolari concentriche all'anello. Indicando con E il campo a $r = a$ ovvero sull'anello, applicando la legge di Faraday si ha

$$2\pi a E = -L \frac{dI}{dt} \quad \longrightarrow \quad E = -\frac{LQ}{(2\pi)^2 a} \frac{d\omega}{dt} . \quad (14)$$

b) Calcoliamo il momento delle forze elettriche su un tratto infinitesimo dell'anello e poi integriamo sulla circonferenza:

$$\tau_E = \int a E \ell ds = \int_{-\pi}^{+\pi} a E \frac{Q}{2\pi a} a d\phi = a Q E = -\frac{LQ^2}{(2\pi)^2} \frac{d\omega}{dt} . \quad (15)$$

Il risultato $\tau_E = aQE$ è intuitivo (tutta la carica Q si trova a distanza a dall'asse ed è sottoposta allo stesso campo E).

c) L'equazione che descrive la rotazione è

$$\mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} = \tau_m + \tau_E \quad \longrightarrow \quad \left(\mathcal{I} + \frac{LQ^2}{(2\pi)^2} \right) \frac{d\omega}{dt} = \tau_M , \quad (16)$$

da cui

$$\omega = \frac{\tau_m}{\mathcal{I}'} t , \quad \mathcal{I}' = \mathcal{I} + \frac{LQ^2}{(2\pi)^2} . \quad (17)$$

L'effetto dell'autoinduzione appare come un aumento dell'inerzia dell'anello.