

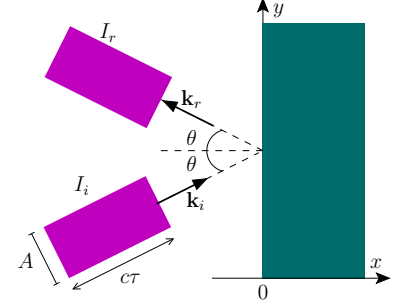
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (04/05/2023)

1

Un impulso prodotto da un laser a diodo e approssimabile come un pacchetto d'onda quasi-monocromatico e quasi-piano “parallelepipedale” di durata τ , sezione trasversale A e intensità I_i incide ad angolo θ sulla superficie piana di un materiale opaco. Dopo la riflessione il pacchetto mantiene la propria durata e sezione mentre la sua intensità è $I_r = RI_i$ con $R < 1$. Calcolare



- l'energia assorbita dal mezzo,
- la forza totale e per unità di superficie esercitata sul mezzo durante la riflessione (si assuma che questa fase duri τ trascurando ogni effetto di bordo),

fornendo stime numeriche per $I_i = 10^6 \text{ W/m}^2$, $\tau = 0.1 \text{ s}$, $A = 10^{-4} \text{ m}^2$, $\theta = 45^\circ$ e $R = 0.5$.

2

Un'onda elettromagnetica piana trasversale di ampiezza del campo elettrico E_0 e frequenza ω si propaga in un plasma nel sistema del laboratorio S . La relazione di dispersione è $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$.

- Calcolare le velocità di fase v_f e di gruppo v_g e l'ampiezza del campo magnetico B_0 .
- Mostrare che in un sistema S' in moto rispetto a S con velocità v_g parallela al vettore d'onda $\mathbf{k}$ la frequenza è $\omega' = \omega_p$ e si calcolino in S' il vettore d'onda $\mathbf{k}'$ e le ampiezze E'_0 e B'_0 .

3

Un materiale anisotropo ha una densità n_e di elettroni il cui moto è descritto dall'equazione

$$\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - (\omega_1^2 \mathbf{x} + \omega_2^2 \mathbf{y} + \omega_3^2 \mathbf{z}), \quad (1)$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{x}}$, $\mathbf{y} = y\hat{\mathbf{y}}$, e $\mathbf{z} = z\hat{\mathbf{z}}$.

- Calcolare gli indici di rifrazione n_2 e n_3 per onde piane trasversali di frequenza ω propaganti lungo x polarizzate rispettivamente lungo $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$, determinando gli intervalli di frequenza in cui le onde si propagano senza attenuarsi.
- Si assumano $n_{2,3}$ reali e positivi e si consideri un'onda come sopra ma che a $x = 0$ ha polarizzazione lungo la diagonale del piano yz ,

$$\mathbf{E}(x = 0, t) = E_0(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Determinare in funzione di $\Delta n = n_3 - n_2$ la posizione x per cui la polarizzazione è ruotata di 90° rispetto a $x = 0$.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2. \quad (3)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (4)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

Teorema di conservazione della quantità di moto

$$\partial_t \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{T} = -(\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (6)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (7)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (8)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (9)$$

SOLUZIONI

1

a) Per trovare l'energia dei pacchetti incidente e riflesso moltiplichiamo la loro intensità per la superficie trasversale e la durata:

$$U_i = I_i \tau A = , \quad U_r = I_r \tau A . \quad (10)$$

L'energia assorbita dal mezzo è data dalla differenza

$$U_a = U_i - U_r = (1 - R)U_i , \quad (11)$$

essendo $U_r = RI_i \tau A = RU_i$. Per i parametri indicati $U_i \simeq 10$ J.

b) La quantità di moto dei pacchetti incidente e riflesso si può calcolare moltiplicando la densità di quantità di moto $\mathbf{g}$ per il volume del pacchetto $c\tau A$. Essendo, per un pacchetto piano, $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2 = \hat{\mathbf{k}}|\mathbf{S}|/c^2$ e $I = |\mathbf{S}|$, si ha

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{g}_i c\tau A = (I_i/c)\tau A \hat{\mathbf{k}}_i = (U_i/c)\hat{\mathbf{k}}_i , \quad \mathbf{p}_r = \mathbf{g}_r c\tau A = (I_r/c)\tau A \hat{\mathbf{k}}_r = (U_r/c)\hat{\mathbf{k}}_r , \quad (12)$$

dove $\hat{\mathbf{k}}_i = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ e $\hat{\mathbf{k}}_r = (-\cos \theta, \sin \theta, 0)$ sono le direzioni dei pacchetti incidente e riflesso. La quantità di moto assorbita dal mezzo è allora data dalla differenza

$$\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_r = (U_i/c)(\hat{\mathbf{k}}_i - R\hat{\mathbf{k}}_r) = \frac{U_i}{c}((1 + R)\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + (1 - R)\hat{\mathbf{y}} \sin \theta) \quad (13)$$

Per calcolare la forza media consideriamo che la quantità di moto viene ceduta in un tempo τ , quindi

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_r}{\tau} = \frac{I_i A}{c}((1 + R)\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + (1 - R)\hat{\mathbf{y}} \sin \theta) . \quad (14)$$

La corrispondente pressione è $\mathbf{P} = \mathbf{F}/(A/\cos \theta)$.

Per i dati numerici forniti $I_i A/c \simeq 3 \times 10^{-3}$ N/m², $I_i A/c \simeq 3 \times 10^{-7}$ N e $F_y/F_x = 1/3$.

2

a) Per definizione le velocità di fase e di gruppo sono date da

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{(k^2 + \omega_p^2/c^2)^{1/2}}{k} c > c , \quad v_g = \partial_k \omega = \frac{k}{(k^2 + \omega_p^2/c^2)^{1/2}} c < c , \quad (15)$$

da cui $v_f v_g = c^2$.

L'ampiezza del campo magnetico si può ottenere scrivendo $\mathbf{E} = \epsilon E_0 e^{ikx - i\omega t}$ con $\epsilon \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0$ e usando l'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$, ottenendo

$$B_0 = (k/\omega) E_0 = E_0/v_f = (v_g/c^2) E_0 . \quad (16)$$

b)

Preso $\beta = v_g/c$, si ha

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \omega/\omega_p . \quad (17)$$

Usando le trasformazioni di Lorentz per le ampiezze dei campi

$$E'_0 = \gamma(E_0 - \beta c B_0) = E_0/\gamma = (\omega_p/\omega)E_0, \quad B'_0 = \gamma(B_0 - \beta E_0/c) = 0. \quad (18)$$

dato che $(\omega/c, \mathbf{k})$ è un quadrivettore otteniamo anche

$$\omega' = \gamma(\omega - \beta k c) = \gamma \frac{\omega_p^2}{\omega} = \omega_p, \quad k' = \gamma(k - \beta \omega/c) = 0. \quad (19)$$

In S' si ha quindi un campo elettrico uniforme oscillante alla frequenza ω_p e zero campo magnetico:

$$\mathbf{E}' = \frac{\omega_p}{\omega} E_0 e^{-i\omega_p t'}. \quad (20)$$

3

a) Prendendo un'onda polarizzata lungo $\hat{\mathbf{y}}$, l'equazione del moto per gli elettroni si riduce a

$$\frac{d^2 y_e}{dt^2} = \frac{dv_{ye}}{dt} = -\frac{e}{m_e} E_0 e^{-i\omega t} - \omega_2^2 y_e, \quad (21)$$

con soluzione $y_e(t) = y_0 e^{-i\omega t}$ dove

$$y_0 = \frac{e E_0 / m_e}{\omega^2 - \omega_2^2}. \quad (22)$$

Scrivendo la densità di momento di dipolo $P_y = -en_e y_e \equiv \varepsilon_0 \chi_2 E$ e usando poi $\mathbf{n}_2^2 = \varepsilon_{2r} = (1 + \chi_2)$, si ottiene

$$\mathbf{n}_2^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_2^2}. \quad (23)$$

Ripetendo il calcolo per polarizzazione lungo $\hat{\mathbf{z}}$ si ottiene l'espressione del tutto analoga

$$\mathbf{n}_3^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_3^2}. \quad (24)$$

Le onde si propagano entrambi se $\mathbf{n}_2$ e $\mathbf{n}_3$ sono reali e positivi, quindi se $\omega > (\omega_p^2 + \omega_{2,3}^2)^{1/2}$ o $\omega < \omega_{2,3}$.

b) Siano $k_{2,3} = (\omega/c)\mathbf{n}_{2,3}$. Se $\mathbf{E}(0, t) = E_0(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})e^{-i\omega t}$, a $x = d$ il campo è dato da

$$\mathbf{E}(d, t) = E_0(\hat{\mathbf{y}}e^{ik_2 d} + \hat{\mathbf{z}}e^{ik_3 d})e^{-i\omega t} = E_0(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}e^{i(k_3 - k_2)d})e^{ik_2 d - i\omega t}. \quad (25)$$

Se $(k_3 - k_2)d = (\omega/c)(\mathbf{n}_3 - \mathbf{n}_2) = (2m + 1)\pi$ con m intero si ha

$$\mathbf{E}(d, t) = E_0(\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}})e^{ik_2 d - i\omega t}, \quad (26)$$

ovvero la polarizzazione è ruotata di 90° .