

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (08/06/2011)

1

Un'onda monocromatica piana di frequenza ω ed ampiezza del campo elettrico pari a E_i incide perpendicolarmente su un materiale, che riempie omogeneamente il semispazio $x > 0$, caratterizzato da un indice di rifrazione $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\omega)$ scrivibile come $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2 =$ con $\mathbf{n}_{1,2}$ reali e positivi e $\mathbf{n}_1 > 1 \gg \mathbf{n}_2$. Calcolare

a) il campo elettromagnetico in tutto lo spazio, ricavando esplicitamente le formule di Fresnel ad incidenza perpendicolare

$$E_r = \frac{1 - \mathbf{n}}{1 + \mathbf{n}} E_i, \quad E_t = \frac{2}{1 + \mathbf{n}} E_i, \quad (1)$$

dove E_r ed E_t sono le ampiezze dell'onda riflessa e dell'onda nel mezzo, rispettivamente;

b) la lunghezza di smorzamento dell'onda nel mezzo, confrontandola con la lunghezza d'onda nel mezzo stesso;

c) la potenza totale assorbita dal mezzo W_{ass} (per unità di superficie e mediata sul periodo), mostrando che $W_{\text{ass}} = (1 - R)I_i$ dove $I_i = \varepsilon_0 c |E_i|^2 / 2$ è l'intensità dell'onda incidente e $R = |E_r/E_i|^2 = |1 - \mathbf{n}|^2 / |1 + \mathbf{n}|^2$ il "coefficiente di riflessione" (suggerimento: calcolare la media temporale del vettore di Poynting S alla superficie $x = 0$ spiegando perché tale quantità è uguale a W_{ass});

d) la pressione di radiazione sulla superficie di separazione, mostrando che $P_{\text{rad}} = (1 + R)I_i/c$ (suggerimento: si può calcolare $P_{\text{rad}} = -\langle T_{xx}(x=0) \rangle$, dove T_{ij} è il tensore degli stress di Maxwell);

e) la forza magnetica totale sul mezzo mediata sul periodo e per unità di superficie

$$P_m = \int_0^{+\infty} \langle (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_x \rangle dx, \quad (2)$$

confrontando il risultato col punto **d**).

2

Un'onda elettromagnetica piana, monocromatica e trasversale si propaga in un mezzo materiale con velocità di fase v_f nel sistema S del laboratorio.

a) Identificare, sulla base di un modello noto per la propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi materiali, due regioni di frequenze in cui $v_f < c$ e $v_f > c$, rispettivamente.

Dimostrare, nei due casi in cui $v_f < c$ e $v_f > c$, che esiste un sistema di riferimento S' nel quale il campo dell'onda è rispettivamente solo

b) magnetico (per $v_f < c$),

c) elettrico (per $v_f > c$),

calcolando in entrambi i casi la velocità della trasformazione di Lorentz da S ad S' .

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (4)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Tensore degli stress di Maxwell

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right] \quad (5)$$

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (6)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (7)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa

$$A(t) = \text{Re}(\tilde{A} e^{-i\omega t}), \quad B(t) = \text{Re}(\tilde{B} e^{-i\omega t}),$$
$$\langle A(t) B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A} \tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

Ad incidenza normale la polarizzazione dell'onda incidente non ha effetto e può essere scelta liberamente, per fissare le idee assumeremo polarizzazione lineare lungo y .

a) Il campo elettrico soluzione dell'equazione d'onda può essere scritto come (in notazione complessa)

$$E_y(x, t) = \begin{cases} E_i e^{ikx - i\omega t} + E_r e^{-ikx - i\omega t} & (x < 0) \\ E_t e^{ikn x - i\omega t} & (x > 0) \end{cases} \quad (9)$$

Le condizioni al contorno sono $E_y(0^-, t) = E_y(0^+, t)$ e $(\partial_x E_y)(0^-, t) = (\partial_x E_y)(0^+, t)$ da cui si ottiene

$$E_i + E_r = E_t, \quad ik(E_i - E_r) = ikn E_t, \quad (10)$$

da cui

$$E_r = \frac{1 - n}{1 + n} E_i, \quad E_t = \frac{2}{1 + n} E_i. \quad (11)$$

Dall'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ troviamo il campo magnetico

$$B_z(x, t) = \begin{cases} (E_i/c) e^{ikx - i\omega t} - (E_r/c) e^{-ikx - i\omega t} & (x < 0) \\ n(E_t/c) e^{ikn x - i\omega t} & (x > 0) \end{cases} \quad (12)$$

b) Il campo per $x > 0$ si può scrivere come

$$E_t e^{ik(n_1 + in_2)x - i\omega t} = E_t e^{ikn_1 x - i\omega t} e^{-kn_2 x} \quad (13)$$

per cui l'onda si smorza su una distanza tipica $(kn_2)^{-1} = \lambda/(2\pi n_2) \gg \lambda/n_1$ dove $\lambda = 2\pi c/\omega$ è la lunghezza d'onda nel vuoto (nel mezzo la lunghezza d'onda è λ/n_1).

c) Il valore medio del vettore di Poynting alla superficie del mezzo fornisce il flusso di energia entrante per unità di superficie. Essendo l'onda evanescente, non c'è flusso di energia uscente a $x \rightarrow \infty$ e quindi l'energia entrante è uguale a regime all'energia assorbita.

Dalle espressioni dei campi si ricava

$$\begin{aligned} \langle S_x(0^+) \rangle &= \langle \varepsilon_0 c^2 E_y(0^+, t) B_z(0^+, t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \operatorname{Re}(E_t n^* E_t^*) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E_t|^2 \operatorname{Re}(n^*) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 |E_t|^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 \frac{4}{|1 + n|^2} |E_i|^2 = \frac{4n_1}{|1 + n|^2} I_i \equiv A I_i. \end{aligned} \quad (14)$$

Si verifica algebricamente che il coefficiente di assorbimento $A = 1 - R$ dove $R = |E_r|^2/|E_i|^2$:

$$1 - R = 1 - \left| \frac{1 - n}{1 + n} \right|^2 = \frac{2(n + n^*)}{|1 + n|^2} = \frac{4\operatorname{Re}(n)}{|1 + n|^2} = \frac{4n_1}{|1 + n|^2} = A. \quad (15)$$

d) Poiché

$$T_{xx}(0, t) = T_{11}(0, t) = -\frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2(0, t) + c^2 \mathbf{B}^2(0, t)) \quad (16)$$

si ha

$$\begin{aligned}\langle T_{11}(0, t) \rangle &= -\frac{\varepsilon_0}{4}|E_t|^2(1 + |\mathbf{n}|^2) = -\varepsilon_0|E_i|^2 \frac{1 + |\mathbf{n}|^2}{|1 + \mathbf{n}|^2} = -\varepsilon_0|E_i|^2 \frac{|1 + \mathbf{n}|^2 - 2\text{Re}(\mathbf{n})}{|1 + \mathbf{n}|^2} \\ &= -\frac{\varepsilon_0}{2}|E_i|^2 \left(2 - \frac{4\mathbf{n}_1}{|1 + \mathbf{n}|^2} \right) = -\frac{I_i}{c}(1 + R) \equiv -P_{\text{rad}}.\end{aligned}\quad (17)$$

e) La densità di corrente nel mezzo si può ottenere, noti $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, dall'equazione $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0 - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ ovvero $J_y = -\partial_x B_z/\mu_0 - \varepsilon_0 \partial_t E_y$ da cui

$$J = -\frac{ik\mathbf{n}}{\mu_0} \frac{\mathbf{n}}{c} E_t e^{-ik\mathbf{n}x} + i\omega\varepsilon_0 E_t e^{-ik\mathbf{n}x} = i\omega\varepsilon_0(1 - \mathbf{n}^2) E_t e^{-ik\mathbf{n}x}, \quad (18)$$

come si può anche ottenere ricordando la relazione tra conducibilità e permittività dielettrica complesse $\sigma(\omega) = -i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_r(\omega) - 1)$ e che $\mathbf{n}^2 = \varepsilon_r(\omega)$.

Si ha quindi

$$\langle J_y B_z \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\omega \text{Re} \left[(i(1 - \mathbf{n}^2) E_t e^{(-ik\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)x}) (\mathbf{n}^* E_t^* e^{(+ik\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2)x}) \right] = \frac{1}{2}\varepsilon_0|E_t|^2 \text{Re} \left[i(1 - \mathbf{n}^2) \mathbf{n}^* \right] e^{-2\mathbf{n}_2 x}. \quad (19)$$

Con un pò di algebra

$$\text{Re} \left[i(1 - \mathbf{n}^2) \mathbf{n}^* \right] = \text{Re} \left[(1 - \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 - 2i\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)(i\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) \right] = \mathbf{n}_2(1 + \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2) = \mathbf{n}_2(1 + |\mathbf{n}|^2) \quad (20)$$

per cui

$$\int_0^\infty \langle J_y B_z \rangle dx = \frac{1}{2}\varepsilon_0|E_t|^2 \mathbf{n}_2(1 + |\mathbf{n}|^2) \int_0^\infty e^{-2\mathbf{n}_2 x} dx = 2\varepsilon_0|E_i|^2 \frac{1 + |\mathbf{n}|^2}{1 - |\mathbf{n}|^2} \mathbf{n}_2 \frac{1}{2\mathbf{n}_2} = P_{\text{rad}}, \quad (21)$$

avendo confrontato con la (17).

2

a) In un mezzo descritto da $\varepsilon_r(\omega) = \mathbf{n}^2(\omega)$ si ha

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = \frac{c}{\mathbf{n}(\omega)}. \quad (22)$$

Quindi deve essere $\mathbf{n}(\omega)$ reale e rispettivamente $\mathbf{n}(\omega) > 1$ o $\mathbf{n}(\omega) < 1$ ovvero $\varepsilon_r(\omega) > 0$ e rispettivamente $\mathbf{n}(\omega) > 1$ o $\mathbf{n}(\omega) < 1$. Nel caso di un mezzo con elettroni legati

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (23)$$

si ha $\varepsilon_r(\omega) > 1$ per $\omega < \omega_0$, e $0 < \varepsilon_r(\omega) < 1$ per $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$.

b) Per le ampiezze di un'onda piana trasversale si ha $E = v_f B$. Quindi trasformando in S'

$$E' = \gamma(E - \beta c B) = \gamma B(v_f - \beta c), \quad B' = \gamma(B - \beta E/c) = \gamma B(1 - v_f \beta/c). \quad (24)$$

Poiché $v_f < c$ si può prendere $\beta = v_f/c$ ed ottenere $E' = 0$, $B' = \gamma B(1 - \beta^2) = B/\gamma$.

c) Se $v_f > c$, nelle formule precedenti prendiamo $\beta = c/v_f < 1$ ottenendo $B' = 0$, $E' = E/\gamma$.