

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (24/06/2011)

1

Una sfera di raggio a è superconduttrice e scherma interamente i campi elettromagnetici esterni, cosicché all'interno della sfera $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = 0$.

a) Se la sfera è posta in un campo elettrico esterno costante e uniforme $\mathbf{E}_0$, dimostrare che in essa viene indotto il momento di dipolo elettrico $\mathbf{p} = 3\varepsilon_0 V \mathbf{E}_0$ dove $V = (4\pi/3)a^3$.

b) Se la sfera è posta in un campo magnetico esterno costante e uniforme $\mathbf{B}_0$, dimostrare che in essa viene indotto il momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = -(3/2\mu_0)V\mathbf{B}_0$.

Sulla sfera incide un'onda elettromagnetica piana, linearmente polarizzata, avente ampiezza del campo elettrico $\mathbf{E}_i$, frequenza ω e tale che $\lambda = 2\pi c/\omega \gg a$.

c) Calcolare, in approssimazione di dipolo elettrico, la potenza P_d diffusa dalla sfera (mediata sul periodo) e la sezione d'urto di diffusione $\sigma_d = P_d/I$, dove I è l'intensità dell'onda incidente.

d) Valutare l'importanza del termine di dipolo magnetico nel calcolo della radiazione diffusa, stabilendo se è valida o no l'approssimazione del punto c) e calcolando l'eventuale contributo alla sezione d'urto.

2

Si consideri un'onda elettromagnetica piana, monocromatica e trasversale propagantesi in un mezzo costituito da elettroni liberi (per il moto dei quali si trascura l'attrito) aventi densità n_e .

a) Dimostrare che la relazione di dispersione dell'onda è data da

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}. \quad (1)$$

b) Determinare le velocità di fase v_f e di gruppo v_g in funzione di ω e la relazione tra le ampiezze del campo elettrico (E_0) e magnetico (B_0) dell'onda.

c) Determinare la densità di energia elettromagnetica dell'onda w_E (mediata su un periodo di oscillazione) in funzione di E_0 .

d) Determinare la densità di energia cinetica dell'onda w_k (mediata su un periodo di oscillazione), definita come $w_k = n_e m_e \langle \mathbf{v}^2 \rangle / 2$ (dove $\mathbf{v}$ è la velocità di oscillazione degli elettroni), in funzione di E_0 . Si dia l'espressione della densità totale di energia $w = w_E + w_k$.

e) Si usino i risultati precedenti per verificare la conservazione del flusso di energia in un processo di riflessione e trasmissione ad incidenza normale di un'onda elettromagnetica dal vuoto sul mezzo, espressa dalla relazione

$$c(w_i - w_r) = v_g w_t, \quad (2)$$

dove w_i , w_r e w_t sono le densità totale di energia per le onde incidente, riflessa e trasmessa, rispettivamente, e v_g è la velocità di gruppo nel mezzo.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) \equiv \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Equazioni della magnetostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{M}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \equiv \nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (5)$$

Campi di dipolo elettrico e magnetico

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} e^{-i\omega t_{\text{rit}}}, \quad \mathbf{E}_m = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{m}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^3} e^{-i\omega t_{\text{rit}}}, \quad (6)$$

Formula di Larmor per la potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad \left(k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right) \quad (7)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (8)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formule di Fresnel per la riflessione e trasmissione ad incidenza perpendicolare sulla superficie di un mezzo

$$E_r = \frac{1-n}{1+n} E_i, \quad E_t = \frac{2}{1+n} E_i, \quad (9)$$

dove E_i , E_r ed E_t sono le ampiezze dell'onda riflessa e dell'onda nel mezzo, rispettivamente e n è l'indice di rifrazione del mezzo.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa

$$A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t}), \quad B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t}), \\ \langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (10)$$

SOLUZIONI

1

a) Una sfera con polarizzazione elettrica uniforme $\mathbf{P}$ genera al suo interno il campo

$$\mathbf{E}_{ind} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}. \quad (11)$$

Quindi, affinché il campo totale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{ind} = 0$, deve essere $\mathbf{E}_0 - \mathbf{P}/3\epsilon_0 = 0$ da cui

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}V = 3\epsilon_0 V \mathbf{E}_0. \quad (12)$$

Per ritrovare la (11) possiamo schematizzare la sfera polarizzata come due sfere cariche, di densità di carica $\pm\rho$, i cui centri vengono separati per uno spostamento infinitesimo $\boldsymbol{\delta}$. Il campo totale nella regione di sovrapposizione è quindi dato da

$$\mathbf{E}_{ind} = +\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\delta}}{2} \right) - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\delta}}{2} \right) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \boldsymbol{\delta}. \quad (13)$$

ed è uniforme. Nel limite $\boldsymbol{\delta} \rightarrow 0$ ma con $\rho\boldsymbol{\delta}$ finito il sistema è equivalente a una sfera con polarizzazione uniforme $\mathbf{P} = \rho\boldsymbol{\delta}$, da cui la (11). Questo ragionamento rende anche evidente che all'esterno il campo è quello di un dipolo $\mathbf{p} = Q\boldsymbol{\delta}$ dove $Q = \rho(4\pi a^3/3)$, essendo equivalente al campo di due cariche puntiformi $\pm Q$ separate di $\boldsymbol{\delta}$.

Naturalmente il problema può essere risolto anche mostrando che la soluzione proposta soddisfa le opportune condizioni al contorno sulla superficie della sfera.

b) L'eguaglianza tra le equazioni della magnetostatica e dell'elettrostatica dei mezzi per lo scambio $\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{D}$ permette di concludere che, in analogia con la (11), una magnetizzazione $\mathbf{M}$ uniforme nella sfera produce il campo $\mathbf{H}_{ind} = -\mathbf{M}/3$. Quindi il campo magnetico totale all'interno è

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0(\mathbf{H}_{ind} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}, \quad (14)$$

per cui ponendo $\mathbf{B} = 0$ si ottiene il risultato cercato

$$\mathbf{M} = -\frac{3}{2\mu_0}\mathbf{B}_0, \quad \mathbf{m} = \mathbf{M}V. \quad (15)$$

c) Sia $\mathbf{E}_i(x, t) = \mathbf{E}_i \cos(kx - \omega t)$ il campo elettrico dell'onda incidente. Poiché $a \ll \lambda$, si può assumere il campo come uniforme sul volume della sfera e trascurare la dipendenza da x , cosicché la sfera si trova in un campo esterno $\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_i \cos(\omega t)$. Per quanto visto sopra il momento di dipolo indotto è $\mathbf{p} = 3\epsilon_0 V \mathbf{E}_i \cos(\omega t)$. Appliciamo allora la formula di Larmor per la potenza media irradiata

$$P_{irr} = \frac{2k_0}{3c^3} \langle |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \rangle = \frac{k_0}{3c^3} \omega^4 (4\pi\epsilon_0 a^3)^2 |\mathbf{E}_i|^2. \quad (16)$$

L'intensità dell'onda è

$$I = \langle S_x \rangle = \epsilon_0 c^2 \langle [\mathbf{E}_i(t) \times \mathbf{B}_i(t)]_x \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathbf{E}_i|^2. \quad (17)$$

Riarrangiando l'espressione precedente si può infine scrivere

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi a^2 \left(\frac{a\omega}{c} \right)^4 = \frac{8}{3} (2\pi)^4 \pi a^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4. \quad (18)$$

d) L'ampiezza dei campi generati dai termini di dipolo elettrico e magnetico sono rispettivamente proporzionali a $\ddot{\mathbf{p}}$ e $\ddot{\mathbf{m}}/c$. Quindi, per campi armonici basta confrontare $p = |\mathbf{p}|$ con $m = |\mathbf{m}|/c$. Nel caso presente

$$\frac{p}{m/c} = \frac{3\varepsilon_0 V E_i}{(3/2\mu_0) V B_i/c} = \frac{2\varepsilon_0\mu_0 E_i}{E_i/c^2} = 2, \quad (19)$$

quindi il termine di dipolo magnetico è la metà di quello di dipolo elettrico e sarà in generale *non* trascurabile. Il contributo alla sezione d'urto, nell'ipotesi che le potenze irradiate siano sommabili, è quindi un quarto del contributo del dipolo elettrico (la potenza irradiata di dipolo magnetico ha la stessa espressione di quella del dipolo elettrico a meno della sostituzione $\ddot{\mathbf{p}} \rightarrow \ddot{\mathbf{m}}/c$) per cui in totale

$$\sigma = \frac{10}{3} \pi a^2 \left(\frac{a\omega}{c} \right)^4 = \frac{10}{3} (2\pi)^4 \pi a^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4. \quad (20)$$

2

a) Rappresentiamo tutti i campi in notazione complessa, $A(x, t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{ikx-i\omega t})$. Sia

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t) = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{ikx-i\omega t}) \quad (21)$$

il campo elettrico dell'onda.

Dalla soluzione dell'equazione del moto di un elettrone libero nel campo dell'onda (trascurando il termine magnetico)

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{E}_0, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{e}{m_e \omega^2} \mathbf{E}_0, \quad (22)$$

si ricava la densità di polarizzazione

$$\tilde{\mathbf{P}} = -en_e \tilde{\mathbf{r}} = -\frac{n_e e^2}{m_e \omega^2} \mathbf{E}_0 \equiv \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0, \quad (23)$$

da cui per la suscettività e la permittività

$$\chi(\omega) = -\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0 \omega^2} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (24)$$

La relazione di dispersione si ottiene allora come

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\varepsilon_r(\omega)} = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (25)$$

b) Per le velocità di fase v_f e gruppo v_g

$$v_f = \frac{\omega}{k} = c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} > c, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{1/2} < c, \quad v_f v_g = c^2. \quad (26)$$

Per le ampiezze dei campi, dall'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ ovvero $ik\tilde{\mathbf{E}} = i\omega\tilde{\mathbf{B}}$ si trova $E_0 = v_f B_0$.

c) Dalla definizione (E_0 si può prendere reale per comodità)

$$w_E = \left\langle \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right\rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} (E_0^2 + c^2 B_0^2) = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_f^2} \right) = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (27)$$

d) Dalla definizione

$$w_K = \left\langle n_e \frac{m_e}{2} \mathbf{v}^2 \right\rangle = n_e \frac{m_e}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{eE_0}{m_e \omega} \right|^2 = \frac{1}{4} \frac{n_e e^2}{m_e \omega^2} E_0^2 = \frac{\varepsilon_0}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_0^2. \quad (28)$$

Per cui

$$w = w_E + w_K = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \quad (29)$$

indipendentemente da n_e .

e) Nel nostro caso la conservazione del flusso di energia si può riscrivere nella forma

$$v_g w_t = c(w_i - w_r) \quad \rightarrow \quad v_g E_t^2 = c(E_0^2 - E_r^2) \quad (30)$$

da cui, usando le formule di Fresnel scritte in termini della velocità di fase nel mezzo $v_f = c/n$,

$$E_r = \frac{v_f - c}{v_f + c} E_0, \quad E_t = \frac{2v_f}{v_f + c} E_0 \quad (31)$$

che dà

$$4v_g v_f^2 = 4c^2 v_f \quad \rightarrow \quad v_g = c^2/v_f. \quad (32)$$