

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2011-2012

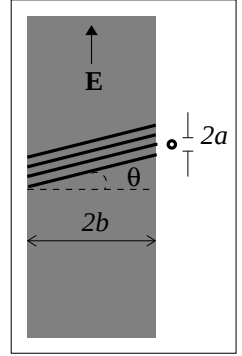
Compito di Fisica 2 (22/06/2012)

1

Un solenoide è costituito da un filo di raggio a e conducibilità σ avvolto su un lungo cilindro di raggio $b \gg a$ e lunghezza $L \gg b$, così che le usuali approssimazioni di solenoide “semi-infinito” con simmetria cilindrica e rotazionale sono approssimativamente soddisfatte. Le spire formano quindi con la sezione del solenoide un angolo

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{a}{\pi b} \quad (1)$$

in quanto per ogni spira di circonferenza $2\pi b$ l'avvolgimento avanza di $2a$. Il solenoide si trova in un campo elettrico costante ed uniforme $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$ parallelo all'asse del solenoide.



Calcolare:

- a) la densità di corrente nelle spire e il campo magnetico B_z generato *all'interno* del solenoide;
- b) il campo magnetico B_ϕ generato *all'esterno* del solenoide;
- c) il vettore di Poynting *all'esterno* del solenoide, verificando che il suo flusso su una superficie cilindrica chiusa coassiale al solenoide sia uguale all'energia dissipata all'interno della superficie.

2

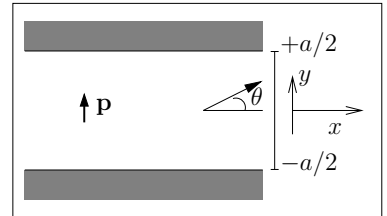
Un dipolo elettrico $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{y}}$ è posto sul piano xy a $y = 0$ e a eguale distanza da due piani infiniti perfettamente conduttori ad esso perpendicolari posti a $y = \pm a/2$.

- a) Descrivere la soluzione del problema del potenziale elettrostatico mediante il metodo delle immagini.

Si assuma adesso che il dipolo abbia una dipendenza oscillante dal tempo, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$ e si consideri sul piano xy la radiazione emessa nella regione di vuoto tra i due conduttori, a grande distanza dal dipolo (cioè per $|x| \gg \lambda$, $|x| \gg a$).

- b) Considerando la condizione di interferenza costruttiva per la radiazione emessa dal dipolo e dalle sue immagini, determinare a quali direzioni $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$ (nel piano $z = 0$) corrisponde tale condizione e gli eventuali vincoli sui valori possibili di ω .

Si consideri ora la propagazione nella regione di vuoto tra i piani di due tipi (“0” e “1”) di onde elettromagnetiche aventi una sola componente del campo magnetico in direzione z :



$$B_{0z} = B_{0z}(x, t) = B_0 e^{ik_x x - i\omega t}, \quad B_{1z} = B_{1z}(x, y, t) = B_1 \cos(k_y y) e^{ik_x x - i\omega t}. \quad (2)$$

- c) Determinare le relazioni tra k_x , k_y e ω per le onde “0” e “1”.
- d) Scrivere le espressioni dei campi elettrici $\mathbf{E}$ corrispondenti alle (2).
- e) Verificare (o imporre dove opportuno) per le espressioni trovate in **d)** la condizione che la componente parallela di $\mathbf{E}$ si annulli alle superfici dei piani conduttori e i conseguenti vincoli sui valori di $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$. Che relazione c'è con gli ordini di interferenza del punto **b)**?

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi \varepsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (4)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

SOLUZIONI

1

a) La componente del campo elettrico parallela al filo della spira vale $E_{\parallel} = E \sin \vartheta \simeq E \tan \vartheta = Ea/(\pi b)$, quindi la densità di corrente all'interno del filo vale $J = \sigma E_{\parallel} \simeq \sigma Ea/(\pi b)$. La corrente nel filo vale così

$$I = J\pi a^2 \simeq \frac{\sigma Ea^3}{b}. \quad (5)$$

Il campo magnetico all'interno del solenoide vale quindi

$$B_z = \mu_0 n I \simeq \mu_0 \frac{1}{2a} \sigma Ea^3/b = \frac{\mu_0 \sigma Ea^2}{2b}, \quad (6)$$

essendo $n = 1/(2a)$ il numero di spire per unità di lunghezza.

b) All'esterno del solenoide, a distanza r dall'asse, abbiamo invece un campo magnetico

$$B_{\varphi} \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \sigma a^3}{2\pi b r} E \quad (7)$$

poiché lungo $\hat{\mathbf{z}}$ scorre la corrente totale I .

c) I campi E_z e B_{φ} generano un vettore di Poynting $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0$ radiale e diretto verso l'interno, che per $r = b^+$ vale:

$$S_r = -\frac{EB_{\varphi}(b)}{\mu_0} = -\frac{\sigma a^3}{2\pi b^2} E^2. \quad (8)$$

Il flusso di $\mathbf{S}$ sulla superficie esterna di un tratto di solenoide lungo ℓ vale quindi

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi b \ell S_r = -\frac{\sigma a^3 \ell}{b} E^2. \quad (9)$$

La potenza dissipata è data dall'integrale di volume di

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E_{\parallel}^2 \simeq \sigma \left(\frac{a}{\pi b} \right)^2 E^2 \quad (10)$$

sul volume delle spire per un tratto ℓ :

$$\mathcal{V} = (\pi a^2)(2\pi b) \frac{\ell}{2a} \quad (11)$$

dove il prodotto dei primi due fattori dà il volume di una spira, e l'ultimo fattore il numero delle spire nel tratto di lunghezza ℓ . Quindi

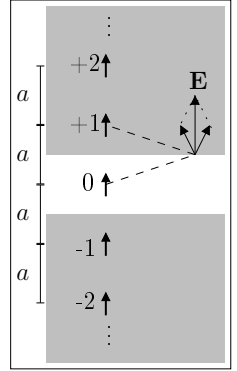
$$P_{\text{dis}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \mathcal{V} = \frac{\sigma a^3 \ell}{b} E^2 \quad (12)$$

che è uguale al flusso di Poynting, come deve.

2

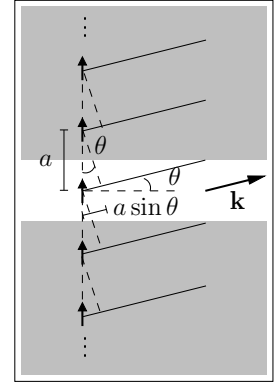
a)

Le condizioni al bordo impongono che il potenziale elettrostatico delle pareti conduttrici sia nullo, ovvero che il campo elettrico alla superficie delle pareti sia ortogonale alle pareti stesse (cioè diretto lungo y). Indichiamo con 0 la posizione del dipolo “reale” $\mathbf{p}$. Considerando un dipolo immagine nella posizione $+1$ simmetrica di $\mathbf{p}$ rispetto alla superficie superiore, e avente lo stesso modulo e verso di $\mathbf{p}$, il campo elettrico risultante alla superficie superiore è nullo come mostrato in figura. Lo stesso ragionamento applicato alla parete inferiore implica che ci sia un altro dipolo immagine uguale a $\mathbf{p}$ nella posizione -1 . Ora, il campo elettrico generato dai dipoli immagine nelle posizioni ± 1 alla superficie delle pareti inferiore e superiore, rispettivamente, indurrà due altri dipoli immagine nelle posizioni ∓ 2 simmetriche rispetto alle superfici. Iterando il ragionamento, la soluzione esatta si ottiene come una serie infinita di dipoli $\mathbf{p}$ a $x = 0$, composta dal dipolo reale in posizione $y = 0a$ e da dipoli immagine identici nelle posizioni $\pm na$, con $n = 1, 2, 3, \dots$



b)

Il dipolo reale e i dipoli immagine oscillano in fase tra loro. Per radiazione emessa in direzione $\mathbf{n}$, ovvero con vettore d'onda $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$, la differenza di cammino ottico tra due dipoli adiacenti è $\Delta\ell = a \sin \theta$, come mostrato in figura per il dipolo reale e il primo dipolo immagine, e quindi la differenza di fase è $k\Delta\ell$. La condizione di interferenza costruttiva è quindi



$$k\Delta\ell = \frac{\omega a}{c} \sin \theta = 2\pi m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Per la simmetria del problema, per ogni angolo θ che soddisfa questa relazione si ha interferenza costruttiva anche per l'angolo $-\theta$. In altri termini, per ogni ordine di interferenza $m > 0$ abbiamo a grande distanza dalla sorgente la sovrapposizione di due onde con vettori d'onda $(\omega/c)(\cos \theta, \sin \theta)$ e $(\omega/c)(\cos \theta, -\sin \theta)$ rispettivamente. La condizione $m = 0$ corrisponde a un'onda che si propaga con $\mathbf{k}$ parallelo alle pareti. Per $m > 0$, notiamo che si può scrivere

$$k_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{2\pi m c}{\omega a} \right)^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi m}{a} \right)^2}, \quad (14)$$

e k_x è reale solo se $\omega > 2\pi m c/a$; al di sotto di questo valore della frequenza non si osserva l'ordine m -esimo di interferenza.

Notiamo che per semplicità abbiamo discusso la radiazione nel piano xy (come da enunciato), mentre in effetti il problema ha una simmetria cilindrica rispetto a $\mathbf{p}$. Quindi gli ordini di interferenza costruttiva corrisponderanno, a distanze sufficientemente grandi, a onde cilindriche propagantisi tra i piani conduttori.

c) I campi devono essere soluzione dell'equazione d'onda

$$(c^2 \nabla^2 - \partial_t^2) B_{i,z} = (c^2 \partial_x^2 + c^2 \partial_y^2 - \partial_t^2) B_{i,z} = 0, \quad (15)$$

da cui si ottiene rispettivamente per $i = 0$ e 1

$$k_x^2 c^2 = \omega^2, \quad k_x^2 c^2 + k_y^2 c^2 = \omega^2. \quad (16)$$

d) Il campo elettrico si può ottenere dall'equazione $\partial_t \mathbf{E} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}$, ovvero

$$-i\omega \mathbf{E} = c^2 (\hat{\mathbf{x}} \partial_y B_z - \hat{\mathbf{y}} \partial_x B_z) , \quad (17)$$

da cui si ricava

$$\mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{y}} c^2 \frac{k_x}{\omega} B_{0z} = \hat{\mathbf{y}} c B_0 e^{ik_x - i\omega t} \quad (k_x = \omega/c) , \quad (18)$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{i}{\omega} c^2 B_1 [\hat{\mathbf{y}} k_x \cos(k_y y) - \hat{\mathbf{x}} k_y \sin(k_y y)] e^{ik_x - i\omega t} \quad \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \omega/c \right) . \quad (19)$$

e) L'onda "0" ha $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ analogamente a quanto avviene per un'onda piana (modo TEM) e $\mathbf{E}$ è perpendicolare alle superfici, per cui le condizioni al bordo non impongono alcuna condizione su $k_x = \omega/c$.

Per l'onda "1", $\mathbf{E}$ ha una componente E_x parallela alle superfici (modo TM) e quindi deve essere $E_x(y = \pm a/2) = 0$. Questo impone $\sin(k_y a/2) = 0$ ovvero $k_y a = 2\pi m$, con $m = 1, 2, 3, \dots$. L'espressione di k_x diviene allora

$$k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi m}{a} \right)^2} , \quad (20)$$

e la condizione che k_x sia reale affinché si possa avere propagazione impone $\omega > 2\pi mc/a$ che è la frequenza di taglio per il modo di ordine m .

Il confronto col punto b) mostra che i modi TEM e TM qui descritti corrispondono agli ordini di interferenza $m = 0$ e $m > 0$ sopra discussi. La direzione del campo elettrico, in particolare, corrisponde alla polarizzazione della radiazione della sorgente di dipolo descritta in b). (Più precisamente, per poter generare un'onda i cui campi non dipendano da z , è necessario avere uno strato di dipoli distribuiti lungo l'asse z .) Notare che il caso di una sorgente dipolare perpendicolare al piano ha differenti condizioni al contorno e consente di mettere in evidenza la natura di interferenza costruttiva dei modi TE (vedere Feynman, vol.2, par.24.8).