

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2012-2013

Compito di Fisica 2 (20/06/2013)

1

- a) Sul piano $y = 0$ si trova una distribuzione di densità di carica superficiale statica $\sigma = \sigma_0 \cos kx$. Determinare il potenziale elettrostatico ϕ e il campo elettrico $\mathbf{E}$ nelle regioni $y > 0$ e $y < 0$.
- b) Sul piano $y = 0$ si trova una distribuzione di densità di corrente superficiale statica $\mathbf{j} = j_0 \hat{\mathbf{z}} \cos kx$. Determinare il potenziale vettore $\mathbf{A}$ e il campo magnetico $\mathbf{B}$ nella regione $y \geq 0$.
- c) Sul piano $y = 0$ si trova una distribuzione di densità di corrente superficiale oscillante $\mathbf{j} = j_0 \hat{\mathbf{z}} e^{-i\omega t} \cos kx$. Determinare il campo elettromagnetico nella regione $y \geq 0$, indicando per quali valori di ω (a k fissato) si hanno soluzioni nella forma di onde propaganti.
- d) (*facoltativo*) Per il caso c) si valuti il lavoro fatto in media su un periodo di oscillazione e per unità di superficie $W = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}(y=0) \rangle$ e si dica per quali valori di ω (a k fissato) si ha $W = 0$, giustificando la risposta sulla base di quanto trovato al punto c).

2

In un mezzo materiale in quiete nel riferimento S del laboratorio esiste un'onda piana *longitudinale* di frequenza ω_l e vettore d'onda $\mathbf{k}_l = k_l \hat{\mathbf{n}}$, i cui campi elettrico e magnetico sono

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - i\omega_l t}, \quad \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

- a) Calcolare le densità di carica e di corrente associate ai campi (1). Che cosa si può dire del valore della permittività dielettrica $\varepsilon(\omega)$ e conducibilità $\sigma(\omega)$ del mezzo per $\omega = \omega_l$?
- b) Sia $\mathbf{V} = (\omega_l/k_l) \hat{\mathbf{n}}$. Assumendo che $V/c = \omega_l/(k_l c) < 1$, determinare la frequenza, il vettore d'onda e le espressioni del campo elettromagnetico e delle densità di carica e corrente nel riferimento S' in moto con velocità $\mathbf{V}$ rispetto a S . Si verifichi per controllo il valore degli invarianti di Lorentz nei due riferimenti.
- c) Si consideri ora un riferimento S'' in moto con velocità $v = \beta c < c$ in direzione *ortogonale* a $\hat{\mathbf{n}}$ rispetto a S . Determinare la frequenza, il vettore d'onda e le espressioni del campo elettromagnetico e delle densità di carica e corrente nel riferimento S'' . Anche in questo caso si verifichi per controllo il valore degli invarianti di Lorentz nei due riferimenti.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Equazioni per i potenziali vettore e scalare in gauge di Lorentz

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} , \quad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} . \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A} , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} . \quad (4)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (5)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c) . \quad (6)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) La situazione è simmetrica rispetto a $y = 0$. Nelle regioni di vuoto ($y > 0$ e $y < 0$) il potenziale è dato dalla soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 \phi(x, y, z) = 0$ che non diverge per $|y| \rightarrow \infty$:

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 e^{-k|y|} \cos kx . \quad (8)$$

Il campo elettrico è dato dal gradiente del potenziale cambiato di segno

$$E_x = -\partial_x \phi = k\phi_0 e^{-k|y|} \sin kx , \quad E_y = -\partial_y \phi = \text{sgn}(y) k\phi_0 e^{-k|y|} \cos kx . \quad (9)$$

Quindi E_x è continuo sul piano $y = 0$ come deve dato che $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Per il teorema di Gauss si ha, sempre a $y = 0$

$$E_y(x, y = 0^+) - E_y(x, y = 0^-) = \sigma(x)/\varepsilon_0 , \quad (10)$$

da cui otteniamo $\phi_0 = \sigma_0/(2\varepsilon_0 k)$.

b) Confrontando $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ con $\nabla^2 \phi = -\rho/\varepsilon_0$ si può procedere per analogia col caso precedente ponendo

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} A_0 e^{-k|y|} \cos kx . \quad (11)$$

Il campo magnetico è dato da

$$B_x = +\partial_y A_z = -\text{sgn}(y) k A_0 e^{-k|y|} \cos kx , \quad B_y = -\partial_x A_z = k A_0 e^{-k|y|} \sin kx . \quad (12)$$

Quindi B_y è continuo sul piano $y = 0$ come deve dato che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Per la legge di Ampère

$$B_x(x, y = 0^+) - B_x(x, y = 0^-) = -\mu_0 j_z(x) , \quad (13)$$

da cui si ottiene $A_0 = \mu_0 j_0/(2k)$.

c) La soluzione generale dell'equazione d'onda nel vuoto per il potenziale vettore è

$$\mathbf{A} = A_0 \hat{\mathbf{z}} e^{-q|y| - i\omega t} \cos kx \quad (14)$$

con $q^2 = k^2 - (\omega/c)^2$. Si hanno onde evanescenti per q reale ($q^2 > 0$) ovvero per $\omega < kc$. Se invece $\omega > kc$ si ha q immaginario puro ($q^2 < 0$) e quindi onde propaganti della forma $\sim e^{i|q||y| - i\omega t}$. Dato che per $y \rightarrow 0$ si ritrova il limite statico, risulta $A_0 = \mu_0 j_0/(2q)$.

Il campo $\mathbf{B}$ è dato dalle espressioni ricavate al punto **b)** con la sostituzione $e^{-k|y|} \rightarrow e^{-q|y| - i\omega t}$, mentre il campo elettrico è dato da $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} = i\omega \mathbf{A}$.

d) Si ha $E_z = (i\mu_0 \omega/(2q)) j_z$ e quindi

$$\langle j_z E_z \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[j_0 \left(\frac{i\mu_0 \omega}{2q} j_0 \right)^* \right] = \frac{1}{4} \mu_0 \omega |j_0|^2 \text{Re} \left(\frac{-i}{q} \right) . \quad (15)$$

Se q è reale, $\langle j_z E_z \rangle = 0$ e ciò risulta consistente con l'evanescenza delle onde per $|y| \rightarrow \infty$: non c'è energia che fugge all'infinito e quindi il lavoro fatto sulle correnti è in media nullo. Viceversa, se q è immaginario puro, $\langle j_z E_z \rangle = -\mu_0 \omega |j_0|^2/(4|q|)$ che, cambiato di segno, dev'essere uguale al flusso di energia elettromagnetica per unità di superficie attraverso un qualunque piano parallelo alla lamina di corrente.

2

a) Ricaviamo le densità di carica e corrente sostituendo i campi (1) nelle equazioni di Maxwell

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = i\varepsilon_0 k_l E, \quad \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = i\omega_l \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (16)$$

La situazione descritta è quella elettrostatica, in cui il campo magnetico si annulla (i termini di corrente materiale e di corrente di spostamento si elidono a vicenda). La conducibilità del mezzo è data dalla relazione $\mathbf{J} = \sigma(\omega)\mathbf{E}$ che alla frequenza ω_l dà

$$\sigma(\omega_l) = i\omega_l \varepsilon_0. \quad (17)$$

Ricordando la relazione tra conducibilità e costante dielettrica nel caso di campi oscillanti

$$-i\omega\varepsilon(\omega) = \sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0, \quad (18)$$

ricaviamo $\varepsilon(\omega_l) = 0$. Del resto abbiamo dall'equazione di Maxwell

$$-i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E} = (\sigma(\omega) - i\omega\varepsilon_0)\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (19)$$

che se $\mathbf{B} = 0$ ammette soluzioni di campo non banali per $\varepsilon(\omega) = 0$.

b) Assumendo $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ e utilizzando le trasformazioni di Lorentz per la frequenza e il numero d'onda

$$\omega'_l = \gamma(\omega_l - V k_l) = 0, \quad k'_l = \gamma(k_l - V \omega_l/c^2) = \gamma k_l (1 - \omega_l^2/(k_l c)^2) = k_l/\gamma \quad (20)$$

(dove $\gamma^{-2} = 1 - \omega_l^2/(k_l c)^2 \equiv 1 - \beta^2$) e quelle per i campi elettromagnetici (si noti che il campo elettrico resta invariato dato che è parallelo al boost)

$$E'_0 = E_0, \quad B'_0 = 0. \quad (21)$$

Dalle equazioni di Maxwell ricaviamo nuovamente le densità di carica e corrente in S'

$$\rho' = i\varepsilon_0 k'_l E' = \rho/\gamma, \quad J'_x = i\omega'_l \varepsilon_0 E' = 0, \quad (22)$$

in accordo con le trasformazioni di Lorentz della quadricorrente.

Banalmente i due invarianti di Lorentz $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $E^2 - c^2 B^2 = E_0^2$ sono gli stessi in S e S' , mentre l'invarianza del modulo della quadricorrente equivale a quella del quadrivettore d'onda

$$\rho^2 c^2 - J_x^2 = -\varepsilon_0^2 E^2 (k_l^2 c^2 - \omega_l^2) = -\varepsilon_0^2 (E')^2 (k'_l)^2 c^2 = (\rho')^2 c^2 \quad (23)$$

dove risulta

$$k_l^2 c^2 - \omega_l^2 = k_l^2 c^2 (1 - \beta^2) = k_l^2 c^2 / \gamma^2 = (k'_l)^2 c^2. \quad (24)$$

c) Assumendo $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{y}} = \beta c\hat{\mathbf{y}}$, e utilizzando le trasformazioni di Lorentz per la frequenza e il numero d'onda

$$\omega''_l = \gamma\omega_l, \quad \mathbf{k}''_l = (k_l, -\beta\gamma\omega_l/c, 0) \quad (25)$$

e quelle per i campi elettromagnetici (il campo elettrico in S è ora trasversale al boost)

$$E''_{x0} = \gamma E_0, \quad B''_{z0} = \gamma\beta E_0/c. \quad (26)$$

Le espressioni complete per i campi elettrico e magnetico in S'' sono le seguenti

$$\mathbf{E}'' = \gamma E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}_l'' \cdot \mathbf{r}'' - i\omega_l'' t''} , \quad \mathbf{B}'' = \gamma \beta \frac{E_0}{c} \hat{\mathbf{z}} e^{i\mathbf{k}_l'' \cdot \mathbf{r}'' - i\omega_l'' t''} . \quad (27)$$

In S'' la densità di carica è data da

$$\rho'' = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}'' = i\varepsilon_0 k_x'' E'' = i\varepsilon_0 k_l \gamma E = \gamma \rho , \quad (28)$$

mentre la densità di corrente si ricava da

$$\mathbf{J}'' = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{B}'' - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}'' , \quad (29)$$

da cui si ottengono le due componenti (per brevità, omettiamo le fasi, invarianti di Lorentz)

$$J_{x0}'' = \frac{1}{\mu_0} \partial_y B_{z0}'' + i\omega_l'' \varepsilon_0 E_{x0}'' = i\omega_l \varepsilon_0 E_0 \gamma^2 (1 - \beta^2) = i\omega_l \varepsilon_0 E_0 = J_0 , \quad (30)$$

$$J_{y0}'' = -\frac{1}{\mu_0} \partial_x B_{z0}'' = -\varepsilon_0 c k_l E_0 \gamma \beta = -\beta \gamma \rho c . \quad (31)$$

Rimangono da controllare gli invarianti: $\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{B}'' = 0$ dato che i campi sono ortogonali, mentre

$$E''^2 - c^2 B''^2 = \gamma^2 E_0^2 - \gamma^2 \beta^2 E_0^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_0^2 = E_0^2 . \quad (32)$$

Infine, omettendo ancora le fasi

$$(\rho_0'')^2 c^2 - (J_{x0}'')^2 - (J_{y0}'')^2 = (\gamma \rho_0 c)^2 - J_0^2 - (\gamma \beta \rho_0 c)^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) \rho_0^2 c^2 - J_0^2 = \rho_0^2 c^2 - J_0^2 . \quad (33)$$