

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (12/06/2014)

1

Un elettrone atomico è descritto dall'equazione classica del moto

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \omega_0^2\mathbf{r} - \nu\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1)$$

Sull'elettrone incide un'onda piana monocromatica di frequenza ω , ampiezza del campo elettrico E_0 , polarizzazione lineare.

- a) Si risolva l'equazione del moto dell'elettrone nel campo dell'onda piana in condizioni di regime e trascurando il termine di forza magnetica.
- b) Supponendo che il termine di smorzamento sia dovuto interamente agli effetti di irraggiamento, si determini un'espressione per il coefficiente "d'attrito" ν eguagliando i valori medi sul periodo della potenza dissipata P_{dis} e della potenza irradiata P_{irr} dall'elettrone.
- c) Si determini ora (all'ordine successivo di approssimazione) la forza media esercitata dal campo magnetico, $\mathbf{f} = \langle -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle$ con un procedimento iterativo, ovvero utilizzando per $\mathbf{v}$ la soluzione della (1) ottenuta al punto a). Si mostri che $\mathbf{f} \neq 0$ se $\nu \neq 0$ e si calcoli il rapporto $|\mathbf{f}|/P_{\text{dis}}$, provando ad interpretare il risultato.
- d) Si supponga di non avere un singolo atomo ma una nanosfera avente raggio $a \ll \lambda$ e contenente N atomi uguali. Si dica come dipendono da N la potenza irradiata e la forza sulla sfera (si trascurino effetti collettivi di risonanza).

2

Un condensatore nel sistema S del laboratorio è costituito da due armature metalliche piane e parallele, sulle quali si trovano rispettivamente le densità di carica libera superficiale $\pm\sigma$. Si consideri il sistema S' in moto rispetto a S con velocità $\mathbf{v}$ parallela alle superficie delle armature, supponendo inizialmente che la permittività dielettrica relativa del mezzo interno al condensatore valga $\varepsilon_r = 1$.

- a) Determinare i campi elettrico e magnetico in S' e le loro sorgenti, ovvero le densità di carica e di corrente.
- b) Calcolare la pressione esercitata dai campi sulle armature in S' e confrontarla con quella in S .
- c) Calcolare la densità e il flusso di energia elettromagnetica all'interno del condensatore, in S e S' .
- d) Si supponga ora che il mezzo che riempie il condensatore abbia permittività dielettrica relativa $\varepsilon_r > 1$. Si risponda nuovamente alla domanda a) in questo caso, e si dica quali valori delle permittività dielettrica e magnetica relative sarebbero attribuiti al mezzo in S' a partire dalle relazioni osservate tra i campi e le densità di carica e corrente libere.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Definizioni generalizzate di permittività dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ e magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \equiv \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{J}_{\text{lib}} , \quad (3)$$

con ρ_{lib} e $\mathbf{J}_{\text{lib}}$ densità di carica libera e di corrente delle cariche libere. Si ha anche la notazione $\mathbf{D} \equiv \varepsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \equiv \mu \mathbf{H}$.

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (4)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (5)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \beta \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \beta \times \mathbf{E}/c) . \quad (6)$$

dove le direzioni sono riferite a β .

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) Scrivendo il campo elettrico dell'onda piana nella forma $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ikx - i\omega t}$, con $\mathbf{E}_0$ reale, trascurando il termine magnetico l'equazione del moto diventa

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 e^{ikx - i\omega t}. \quad (8)$$

Proviamo con una soluzione del tipo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{ikx - i\omega t}$. Sostituendo nella (8) otteniamo per $\mathbf{r}_0$

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e\mathbf{E}_0/m_e}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega\nu}. \quad (9)$$

b) La potenza dissipata vale $P_{\text{dis}} = \langle -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle$, con $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, e sostituendo abbiamo

$$P_{\text{dis}} = \langle -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{e^2 |\mathbf{E}_0|^2}{m_e} \frac{i\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega\nu} \right] = \frac{1}{2} \frac{e^2 |\mathbf{E}_0|^2}{m_e} \frac{\omega^2 \nu}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \nu^2}. \quad (10)$$

La potenza irradiata P_{irr} vale

$$P_{\text{irr}} = \left\langle \frac{2k_0 e^2}{3c^3} \dot{\mathbf{r}}^2 \right\rangle = \frac{k_0 e^2}{3c^3} \omega^4 |\mathbf{r}_0|^2 = \frac{k_0 e^4 |\mathbf{E}_0|^2}{3m_e c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \nu^2}. \quad (11)$$

Abbiamo così

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{dis}}} = \frac{2k_0 e^2 \omega^2}{3m_e c^3 \nu} = \frac{2r_c \omega^2}{3c\nu}, \quad (12)$$

da cui otteniamo per il coefficiente "d'attrito"

$$\nu = \frac{2r_c \omega^2}{3c}, \quad r_c = k_0 \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (13)$$

c) La forza magnetica sull'elettrone vale $\mathbf{f} = \langle -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle$ con $\mathbf{B}$ diretto perpendicolarmente a $\hat{\mathbf{x}}$ ed $\mathbf{E}_0$, e di modulo $B_0 = E_0/c$. Abbiamo così

$$\mathbf{f} = \langle -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle = -\frac{e^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2m_e c} \text{Re} \left[\frac{-i\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega\nu} \right] \hat{\mathbf{x}} = \frac{e^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2m_e c} \frac{\omega^2 \nu}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2 \nu^2} \hat{\mathbf{x}}. \quad (14)$$

Si ha

$$f_x = \frac{P_{\text{dis}}}{c} = \frac{P_{\text{irr}}}{c}, \quad (15)$$

che si può interpretare osservando che per l'onda elettromagnetica le densità di energia e quantità di moto sono proporzionali con fattore c , e che vengono cedute all'atomo secondo questa proporzione.

d) L'irraggiamento è coerente se $a \ll \lambda$, quindi P_{irr} viene moltiplicata per N^2 e così la forza totale (l'accelerazione scala quindi con N).

2

a) Mentre nel sistema S abbiamo il solo campo elettrico $E = \sigma/\varepsilon_0$, nel sistema S' abbiamo i campi

$$\mathbf{B}' = -\gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = -\gamma \frac{v}{c^2} E \hat{\mathbf{z}} , \quad \mathbf{E}' = \gamma \mathbf{E} , \quad (16)$$

e le densità di carica e corrente superficiali valgono

$$\sigma' = \gamma \sigma , \quad \iota' = -\gamma \sigma \mathbf{v} , \quad \text{con le relazioni} \quad E' = \sigma'/\varepsilon_0 , \quad B' = \mu_0 \iota' . \quad (17)$$

b) Nel sistema S abbiamo per la pressione sulle armature

$$P = \frac{1}{2} \sigma E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} , \quad (18)$$

mentre in S' abbiamo

$$P' = \frac{1}{2} (\sigma' E' - \iota' B') = \frac{1}{2} \left(\gamma^2 \sigma E - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \sigma E \right) = \frac{1}{2} \sigma E = P . \quad (19)$$

c) In S si ha ($\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ vettore di Poynting)

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 , \quad \mathbf{S} = 0 , \quad (20)$$

mentre in S'

$$u' = \frac{\varepsilon_0}{2} E'^2 + \frac{1}{2\mu_0} B'^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \gamma^2 (1 + \beta^2) , \quad \mathbf{S}' = \varepsilon_0 c^2 \gamma \mathbf{E} \times \left(-\gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = -\varepsilon_0 E^2 \gamma^2 \mathbf{v} . \quad (21)$$

d) Posto $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ in S abbiamo

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} , \quad (22)$$

e in S'

$$E' = \gamma E , \quad B' = -\frac{\gamma v}{c^2} \frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{\iota'}{\varepsilon c^2} = -\frac{\mu_0 \iota'}{\varepsilon_r} \equiv \mu'_r \mu_0 H' , \quad (23)$$

da cui $\mu'_r = 1/\varepsilon_r$.