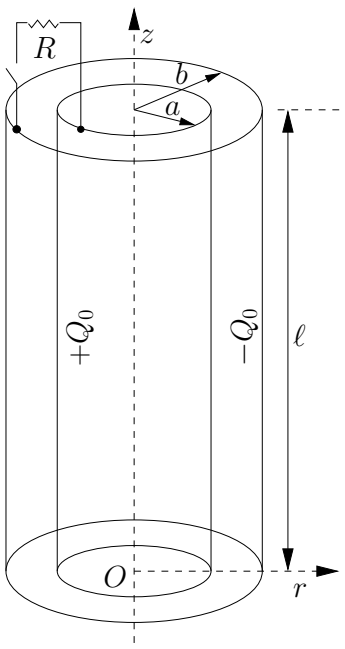
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2014-2015

Compito di Fisica 2 (10/06/2015)

1



Un condensatore cilindrico ha raggio interno a, raggio esterno b, e lunghezza $\ell \gg b$. Inizialmente le armature sono isolate e disconnesse, e su di esse si trovano le cariche $\pm Q_0$ rispettivamente.

a) Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore, la capacità C del condensatore e la sua energia elettrostatica.

A $t = 0$ le armature vengono connesse attraverso una resistenza R posta a un capo del condensatore (si trascuri ogni effetto di bordo ovvero del circuito esterno così come la resistenza delle armature).

b) Determinare la legge di scarica del condensatore.

Si consideri la fase di scarica facendo l'ipotesi di campi e correnti lentamente variabili, e di densità di carica superficiale *uniforme* sulle armature (così che il campo elettrico ha la stessa direzione del caso elettrostatico).
c) Calcolare l'intensità di corrente $I = I(z, t)$ che scorre sulle armature e il campo magnetico $\mathbf{B} = B_\phi(r, z, t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ all'interno del condensatore.

d) Calcolare il vettore di Poynting $\mathbf{S}$, verificando che il suo flusso attraverso una superficie cilindrica coassiale al condensatore è proporzionale all'energia elettrostatica contenuta all'interno della superficie.

e) Discutere i limiti dell'approssimazione di campi lentamente variabili.

2

Un'onda elettromagnetica piana e monocromatica di ampiezza del campo elettrico E_i, frequenza ω e polarizzazione lungo $\hat{\mathbf{y}}$ incide su una piccola sfera perfettamente conduttrice (all'interno $\mathbf{E} = 0$) di raggio $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$.
a) Calcolare la potenza P_d diffusa dalla sfera e la sezione d'urto di diffusione $\sigma = P_d/I$, dove I è l'intensità dell'onda incidente, considerando il contributo all'irraggiamento del solo termine di dipolo elettrico. Mostrare che si può scrivere $\sigma = \alpha\pi a^2(a/\lambda)^\beta$ dove α e β sono coefficienti da determinare.
b) Calcolare la potenza irraggiata P_m dovuta al termine di dipolo magnetico e il rapporto P_m/P_d (si può assumere senza dimostrarlo che i contributi alla potenza P_m e P_d possono essere calcolati indipendentemente, ovvero che la potenza totale non risente di effetti di interferenza tra le emissioni di dipolo elettrico e magnetico).
c) Considerando un mezzo artificiale costituito da n sferette conduttrici per unità di volume immerse in un materiale di suscettività elettrica e magnetica trascurabili, calcolare la permittività dielettrica del mezzo, stabilendo l'eventuale dipendenza dalla frequenza.
NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\ . \tag{1}$$

Campo elettrico (magnetico) interno a una sfera con polarizzazione elettrica (magnetica) uniforme $\mathbf{P}$ ($\mathbf{M}$):

$$\mathbf{E}_{\rm int}=-\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\ ,\qquad \mathbf{B}_{\rm int}=\frac{2\mu_0}{3}\,\mathbf{M}\ . \tag{2}$$

Definizione di permittività dielettrica ε_r per un mezzo lineare:

$$\mathbf{P}=\varepsilon_0\chi\mathbf{E}\ ,\qquad \varepsilon_r=1+\chi\ ,\qquad \varepsilon_r=\varepsilon_0\varepsilon_r \tag{3}$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2 \tag{4}$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo magnetico $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^5}|\ddot{\mathbf{m}}|^2\ . \tag{5}$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right)+\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S}=0\ , \tag{6}$$

dove $\mathbf{S}=\varepsilon_0c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B}$.
Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t)=\mathrm{Re}(\tilde{A}\mathrm{e}^{-i\omega t})$ e $B(t)=\mathrm{Re}(\tilde{B}\mathrm{e}^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*)\ ,\qquad \left\langle A^2(t)\right\rangle=\frac{1}{2}|\tilde{A}|^2\ . \tag{7}$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r,ϕ,z)

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V}=\left(r^{-1}\partial_\phi V_z-\partial_z V_\phi,\partial_z V_r-\partial_r V_z,r^{-1}(\partial_r(rV_\phi)-\partial_\phi V_r)\right)\ . \tag{8}$$

SOLUZIONI

1

a) Poiché per ipotesi il problema ha simmetria cilindrica ci conviene usare un sistema di coordinate cilindriche (r, φ, z) con l'asse z coincidente con l'asse comune delle due armature, e l'origine O all'estremità inferiore del condensatore. Entro le nostre approssimazioni, il campo elettrico nello spazio tra le armature ha solo la componente r ed è indipendente da z e φ. Applicando il teorema di Gauss abbiamo

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \frac{Q_0}{r}\,, \tag{9}$$

per $a < r < b$, e zero altrove. La differenza di potenziale tra le due armature vale

$$|V| = \int_a^b E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\,\ln\left(\frac{b}{a}\right)\,, \tag{10}$$

da cui

$$C = \frac{Q_0}{|V|} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln(b/a)}\,. \tag{11}$$

L'energia elettrostatica inizialmente immagazzinata nel condensatore è

$$U_{\mathrm{es}} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{\ln(b/a)}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\,Q_0^2\,. \tag{12}$$

b) Abbiamo un circuito RC, che si scarica secondo la legge

$$Q(t) = Q_0\, e^{-t/\tau}\,, \quad \text{con} \quad \tau = RC = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln(b/a)}\,R\,. \tag{13}$$

c) Per quel che riguarda il campo elettrico durante la scarica, con le nostre ipotesi esso ha la stessa forma del caso statico, quindi basta sostituire a Q_0 la carica variabile durante la scarica. Abbiamo dalla (9) e dalla (13)

$$E(r,t) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\frac{Q_0}{r}\,e^{-t/\tau}\,. \tag{14}$$

La corrente che circola nella resistenza è

$$I_R(t) = I(\ell, t) = \left|\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{Q_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}\,. \tag{15}$$

Per calcolare $I(z,t)$ a $z < \ell$ dobbiamo tenere conto che la carica fluisce solo dall'estremità superiore del condensatore e che, per ipotesi, la densità di carica rimane uniforme ad ogni istante. Quindi, la carica contenuta tra $z = 0$ ed una generica altezza $z < \ell$ è $\Delta Q(z,t) = Q(t)z/\ell$, e la corrente che fluisce all'altezza z è

$$I(z,t) = -\frac{d(\Delta Q)}{dt} = \frac{Q(t)}{\tau}\frac{z}{\ell} = \frac{Q_0}{\tau}\frac{z}{\ell}\,e^{-t/\tau}\,. \tag{16}$$

Alternativamente si può integrare direttamente l'equazione di continuità che lega I alla densità lineare di carica $Q(t)/\ell$

$$\partial_z I = -\frac{\partial_t Q}{\ell} \longrightarrow I = -\frac{z}{\ell}\partial_t Q = \frac{Q}{\tau}\frac{z}{\ell}\,. \tag{17}$$

Per calcolare il campo magnetico, dall'equazione di Maxwell $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$ in coordinate cilindriche otteniamo per le componenti non nulle

$$-\partial_z B_\varphi = \frac{1}{c^2}\partial_t E_r \ , \qquad \frac{1}{r}(r B_\varphi) = \mu_0 J_z \ , \tag{18}$$

che possono essere usate entrambi per trovare B_φ a partire dalla conoscenza di E_r o di J_z. La seconda relazione equivale a dire che, calcolando la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo una circonferenza di raggio r (con $a < r < b$) coassiale con il sistema, essa è uguale al solo flusso della corrente materiale attraverso il cerchio delimitato dalla circonferenza (cioè all'intensità di corrente $I(z,t)$ che scorre lungo l'armatura interna), in quanto la corrente di spostamento dà un contributo nullo al flusso. Si ha allora

$$\oint \mathbf{B}(r,z,t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I(z,t) \ , \tag{19}$$

da cui otteniamo

$$B_\varphi(r,z,t) = \frac{\mu_0 I(z,t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{Q_0}{\tau}\frac{z}{\ell}\, e^{-t/\tau} \equiv B_{0\varphi}(r,z)\, e^{-t/\tau} \, . \tag{20}$$

Questo risultato si ottiene anche integrando lungo z l'equazione

$$\partial_z B_\varphi = -\frac{1}{c^2}\partial_t E_r = \frac{1}{c^2}\frac{E_r}{\tau} \ , \tag{21}$$

dove l'integrale è banale dato che E_r non dipende da z.
d) Il vettore di Poynting è dato da

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{z\, Q_0^2}{4\pi^2 \varepsilon_0\, \ell^2\, \tau\, r^2}\, e^{-2t/\tau}\, \hat{\mathbf{z}} \, . \tag{22}$$

Il flusso di $\mathbf{S}$ attraverso una sezione del condensatore ad altezza z è quindi dato da

$$\Phi_s(z,t) = \frac{z\, Q_0^2}{4\pi^2 \varepsilon_0\, \ell^2\, \tau}\, e^{-2t/\tau} \int_a^b \frac{1}{r^2}\, 2\pi r\, \mathrm{d}r = \frac{z \ln(b/a)\, Q_0^2}{2\pi \varepsilon_0\, \ell^2\, \tau}\, e^{-2t/\tau} \, . \tag{23}$$

L'energia elettrostatica contenuta tra $z = 0$ e z è data da

$$U_{\mathrm{es}}(z,t) = U_{\mathrm{es}}(t)\frac{z}{\ell} = \frac{Q_0^2\, e^{-2t/\tau}}{2C}\, \frac{z}{\ell} = \frac{\ln(b/a)}{4\pi\varepsilon_0 \ell}\, Q_0^2\, \frac{z}{\ell}\, e^{-2t/\tau} \tag{24}$$

in quanto il campo elettrico non dipende da z. Abbiamo quindi

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{es}}(z,t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{\tau} U_{\mathrm{es}}(z,t) = -\Phi_s(z,t) \, . \tag{25}$$

e) Il condensatore può essere visto come un tratto di cavo coassiale lungo il quale è noto che si propagano segnali di carica e corrente con velocità c. Quindi la densità può essere assunta uniforme se la propagazione dei segnali è praticamente "istantanea" lungo la scarica, ovvero se il tempo di propagazione $\ell/c \ll \tau$.

Alla stessa conclusione si arriva richiedendo che il campo elettrico generato per induzione magnetica sia piccolo rispetto al campo elettrostatico: da $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, si ha un campo radiale di induzione $E_{1r} \simeq (\mu_0 \sigma_i/2)(z/\tau)^2 (a/r)$, ed $E_{1r} \ll E$ se $\ell/\tau \ll c$.

2

Nel seguito sottintendiamo per tutti i campi la comune dipendenza temporale $\sim \mathrm{e}^{-i\omega t}$, ovvero scriviamo le relazioni per le ampiezze complesse.
a) La carica superficiale indotta sulla sfera è equivalente a una polarizzazione uniforme $\mathbf{P} = 3\varepsilon_0\mathbf{E}_i$ così che all'interno $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i - \mathbf{P}/3\varepsilon_0 = 0$. Il momento di dipolo è $\mathbf{p} = \mathbf{P}(4\pi a^3/3) = 4\pi\varepsilon_0 a^3\mathbf{E}_i$. La potenza irraggiata in media sul periodo è

$$P_d = \frac{k_0\omega^4}{3c^3}|\mathbf{p}|^2 = \frac{4}{3}\pi a^2\left(\frac{a\omega}{c}\right)^4 \varepsilon_0 c|\mathbf{E}_i|^2 \ . \tag{26}$$

L'intensità dell'onda è $I = \langle|\mathbf{S}|\rangle = \varepsilon_0 c|\mathbf{E}_i|^2/2$, da cui

$$\sigma = \frac{8}{3}(2\pi)^4\pi a^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \ . \tag{27}$$

b) In analogia col punto precedente, le correnti indotte sulla superficie della sfera sono equivalenti a una densità di magnetizzazione $\mathbf{M} = -3\mathbf{B}_i/(2\mu_0)$ tale che $\mathbf{B} = \mathbf{B}_i + 2\mu_0\mathbf{M}/3 = 0$ all'interno della sfera. Il momento di dipolo magnetico è $\mathbf{m} = \mathbf{M}(4\pi a^3/3) = -2\pi a^3\mathbf{B}_i/\mu_0$. La potenza irraggiata in media sul periodo è

$$P_m = \frac{k_0\omega^4}{3c^5}|\mathbf{m}|^2 \ . \tag{28}$$

Poiché $\mathbf{B}_i = \mathbf{E}_i/c$, si ha $\mathbf{m} = (1/2)\mathbf{p}c$ da cui immediatamente

$$P_m = (1/2)^2 P_d = (1/4)P_d \ . \tag{29}$$

c) La polarizzazione *macroscopica* del mezzo è

$$P_{\text{macro}} = n_s\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 n_s\mathbf{E}_i \equiv \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_i \ , \tag{30}$$

da cui si ricava $\chi = 4\pi a^3 n_s = 3f$ dove f è la frazione di volume occupata dalle sferette. La permittività dielettrica è quindi indipendente dalla frequenza.