

# Corso di Laurea in Fisica

## Anno Accademico 2015-2016

---

---

### Compito di Fisica 2 (07/06/2016)

---

---

#### 1

In una regione di spazio vuoto (ovvero priva di cariche e correnti) nel riferimento del laboratorio  $S$  esiste un campo magnetico statico e disomogeneo  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y)$ , indipendente da  $z$  e avente le sole componenti  $B_x$  e  $B_y$ . La componente lungo l'asse  $y$  ha la forma  $B_y = b_y(y) \cos(kx)$  con  $b_y(y) = b_y(-y)$  e  $b_y(0) \equiv B_0$ . Il campo è generato da opportune sorgenti localizzate a valori finiti di  $|y|$ .

a) Dimostrare che, nella regione di vuoto

$$B_y = B_0 \cos(kx) \cosh(ky) , \quad (1)$$

e determinare l'espressione di  $B_x$ .

b) Calcolare i campi elettrico e magnetico in un riferimento  $S'$  in moto rispetto a  $S$  con velocità  $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ , specificandone la dipendenza dalle coordinate spazio-temporali  $(x', y', t')$ .

c) Una particella di carica  $q$  si muove in  $S$  lungo l'asse  $x$  con velocità  $\mathbf{V}$ . Risolvere l'equazione del moto per la particella in  $S'$  (considerando solo termini lineari nell'equazione del moto) e discutere la radiazione emessa.

d) Determinare in  $S$  la frequenza della radiazione emessa dalla particella in direzione parallela o antiparallela al suo moto.

e) In che direzioni in  $S$  l'emissione di radiazione è nulla?

#### 2

Si consideri un materiale omogeneo di conducibilità elettrica  $\sigma$  e permeabilità magnetica  $\mu$ , ambedue reali, positive e indipendenti dalla frequenza.

a) Mostrare che se la densità di corrente di spostamento  $\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$  è trascurabile il campo magnetico soddisfa un'equazione della forma

$$\partial_t \mathbf{B} = \alpha \nabla^2 \mathbf{B} , \quad (2)$$

determinando il valore della costante reale  $\alpha$ .

Una lastra del materiale suddetto viene immersa in un campo magnetico uniforme e oscillante  $\mathbf{B}_0 = B_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}} = \text{Re}(B_0 e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{y}})$ . In condizioni opportune (da verificare *a posteriori*) si può considerare la lastra come semi-infinita ed estesa nell'intero semispazio  $x > 0$  e trascurare la corrente di spostamento.

b) Determinare, usando la (2), l'espressione del campo magnetico  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, t)$  per  $x > 0$ , discutendo (anche a posteriori) la validità delle assunzioni fatte.

c) Calcolare la potenza dissipata nel mezzo.

**NB** Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

# FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Campo di radiazione di un dipolo elettrico  $\mathbf{p}(t)$  posto in  $r = 0$

$$\mathbf{E}_e(r, t) = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r c^2}, \quad (4)$$

dove  $t_{\text{rit}} = t - r/c$ .

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (5)$$

dove  $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

Trasformazioni di un quadrivettore  $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$  per una trasformazione di Lorentz con velocità  $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (6)$$

dove le direzioni  $\parallel$  e  $\perp$  sono riferite a  $\mathbf{V}$  e  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con  $\beta = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (7)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (8)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come  $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$  e  $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (9)$$

Identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (10)$$

# SOLUZIONI

## 1

a) La condizione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  dà

$$\partial_x B_x = -\partial_y B_y = -(\partial_y b_y) \cos(kx) , \quad (11)$$

da cui

$$B_x = -(\partial_y b_y) \frac{\sin(kx)}{k} . \quad (12)$$

La condizione  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  dà

$$0 = \partial_x B_y - \partial_y B_x = -kb_y(y) \sin(kx) + (\partial_y^2 b_y) \frac{\sin(kx)}{k} , \quad (13)$$

$$\partial_y^2 b_y = k^2 b_y . \quad (14)$$

La soluzione con la parità richiesta è

$$b_y = B_0 \cosh(ky) , \quad (15)$$

Si ha quindi

$$B_x = -B_0 \sin(kx) \sinh(ky) , \quad B_y = B_0 \cos(kx) \cosh(ky) , \quad (16)$$

dove  $B_0$  è il campo sull'asse.

b) Le trasformazioni di Lorentz dei campi elettrico e magnetico da  $S$  a  $S'$  danno per un boost in direzione  $\hat{\mathbf{x}}$  le componenti non nulle

$$B'_x = B_x[x(x', t'), y'] = -B_0 \sinh(ky') \sin(k\gamma(x' + Vt')) , \quad (17)$$

$$B'_y = \gamma B_y[x(x', t'), y'] = \gamma B_0 \cosh(ky') \cos(k\gamma(x' + Vt')) ; \quad (18)$$

$$E'_z = \gamma V B_y[x(x', t'), y'] = \gamma V B_0 \cosh(ky') \cos(k\gamma(x' + Vt')) , . \quad (19)$$

dove  $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ . Notare che  $y' = y$ .

c) Trascurando la forza magnetica è consistente assumere che la carica  $q$  oscilli solo lungo  $z$  sotto l'azione di un campo elettrico  $E = E'_z(0, 0, t') = \gamma V B_0 \cos(\omega' t')$  dove  $\omega' = k\gamma V$ . La carica emette radiazione di dipolo elettrico della stessa frequenza  $\omega'$  (diffusione Thomson in  $S'$ ).

d) Antitrasformando nel riferimento  $S$ , le frequenze della radiazione emessa in avanti (+) e indietro (-) sono date da

$$\omega_{\pm} = \gamma(1 \pm \beta)\omega' = \gamma(1 \pm \beta)k\gamma V = kc\gamma^2\beta(1 \pm \beta) . \quad (20)$$

dove  $\beta = V/c$ .

e) In  $S'$  la radiazione emessa è nulla lungo la direzione dell'accelerazione, ovvero in direzione di  $\mathbf{E}'$  cioè lungo  $\hat{\mathbf{z}}$ . Questa direzione corrisponde a due vettori d'onda con  $k'_x = 0$  e  $k'_z = \pm\omega'/c$ . Trasformando nel sistema  $S$  del laboratorio si ha

$$k_x = \gamma \left( k'_x \pm \frac{\omega'}{c} \beta \right) = \pm \gamma \frac{\omega'}{c} , \quad k_z = k'_z = \frac{\omega'}{c} , \quad (21)$$

per cui in  $S$  l'emissione è nulla agli angoli  $\pm\theta$  tale che

$$\tan \theta = \frac{k_z}{k_x} = \pm \frac{1}{\gamma\beta} . \quad (22)$$

## 2

a) Partiamo dalle equazioni di Maxwell in un mezzo con densità di corrente sia libera ( $\mathbf{J}_{\text{lib}}$ ) che di magnetizzazione ( $\mathbf{J}_{\text{M}}$ ):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_{\text{lib}} + \mathbf{J}_{\text{M}}) + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} , \quad (23)$$

Usando la definizione di  $\mathbf{H}$  e trascurando la densità di corrente di spostamento  $\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$  si ha

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\mu \mathbf{H}) = \mu \mathbf{J}_{\text{lib}} . \quad (24)$$

Calcoliamo il rotore della seconda ricordando che  $\mathbf{J}_{\text{lib}} = \sigma \mathbf{E}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) = \mu \nabla \times \mathbf{J}_{\text{lib}} = \mu \sigma \nabla \times \mathbf{E} . \quad (25)$$

A questo punto ricordiamo che  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  e introduciamo la prima delle (23)

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{B} , \quad \text{ovvero} \quad \partial_t \mathbf{B} = \alpha \nabla^2 \mathbf{B} , \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{1}{\mu \sigma} . \quad (26)$$

b) Per ipotesi  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} B(x, t)$ . Poiché  $\mathbf{B}$  è parallelo alla superficie di separazione tra il semispazio vuoto e il semispazio riempito dal nostro materiale, si conserva la componente parallela di  $\mathbf{B}/\mu_r$  e avremo la condizione al bordo

$$B(0^+, t) = \mu_r B_0 \cos(\omega t) . \quad (27)$$

La (2) si riscrive

$$\partial_t B = \alpha \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} , \quad (28)$$

Cercando una soluzione oscillante del tipo  $B = \text{Re} [\tilde{B}(x) e^{-i\omega t}]$  si ha

$$-i\omega \tilde{B} = \alpha \frac{\partial^2 \tilde{B}}{\partial x^2} . \quad (29)$$

Essendo la radice complessa  $\sqrt{-i} = \pm(1-i)/\sqrt{2}$ , si hanno soluzioni del tipo

$$\tilde{B} = \tilde{B}(0) \exp \left( \pm \frac{1-i}{\ell_s} x \right) , \quad (30)$$

dove  $\ell_s = \sqrt{2\alpha/\omega}$ . La soluzione col segno “+” è da scartare perché darebbe un campo che cresce all’infinito con la profondità nel materiale. Quindi, la soluzione è

$$B = \text{Re} (\mu_r B_0 e^{-(1-i)x/\ell_s - i\omega t}) = \mu_r B_0 e^{-x/\ell_s} \cos \left( \frac{x}{\ell_s} - \omega t \right) , \quad (31)$$

All’interno del materiale il campo decresce esponenzialmente con lunghezza caratteristica  $\ell_s$ , e la lastra può essere considerata semi-infinita se il suo spessore è molto maggiore di  $\ell_s$ .

c) Il campo elettrico si ottiene da  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$  che dà

$$\tilde{E}_z = -\frac{1-i}{2} \mu_r \omega \ell_s B_0 e^{-(1-i)x/\ell_s} . \quad (32)$$

La potenza dissipata per unità di volume, *considerando la sola corrente (Ohmica) delle cariche libere*, è

$$\langle \mathbf{J}_{\text{lib}} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\sigma}{2} |\tilde{E}_z|^2 = \frac{\sigma}{4} \mu_r^2 \omega^2 \ell_s^2 B_0 e^{-2x/\ell_s} = \frac{\mu_r \omega B_0^2}{2\mu_0} e^{-2x/\ell_s} . \quad (33)$$

Per cui la potenza dissipata totale per unità di superficie è

$$\int_0^\infty \langle \mathbf{J}_{\text{lib}} \cdot \mathbf{E} \rangle dx = \frac{\mu_r \omega B_0^2 \ell_s}{4\mu_0} . \quad (34)$$

Potremmo però chiederci se la corrente di magnetizzazione  $\mathbf{J}_M$  contribuisca o meno alla dissipazione. La densità di corrente *totale* si ottiene da  $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ , da cui scrivendo  $\mathbf{J} = \tilde{J}_z \hat{\mathbf{z}} e^{-i\omega t}$  si ha

$$\tilde{J}_z = \frac{1}{\mu_0} \partial_x \tilde{B}_y = -\frac{\mu_r}{\mu_0 \ell_s} (1-i) B_0 e^{-(1-i)x/\ell_s} . \quad (35)$$

La corrente di conduzione si può scrivere come

$$\tilde{J}_{\text{lib},z} = \sigma \tilde{E}_z = -\frac{1-i}{2} \mu_r \omega \ell_s \sigma B_0 e^{-(1-i)x/\ell_s} = -\frac{1}{\mu_0 \ell_s} (1-i) B_0 e^{-(1-i)x/\ell_s} = \frac{1}{\mu_r} \tilde{J}_z , \quad (36)$$

dove si è usato  $\ell_s^2 = 2/\mu\sigma\omega$  e  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Se  $\mu_r \gg 1$  si ha  $\tilde{J}_{\text{lib},z} \ll \tilde{J}_z$ , ovvero la corrente di magnetizzazione è molto più grande della corrente libera. L'integrale su  $x$  di  $\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle$  dà quindi immediatamente un valore pari a  $\mu_r$  volte la (34),

$$\int_0^\infty \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle dx = \frac{\mu_r^2 \omega B_0^2 \ell_s}{4\mu_0} . \quad (37)$$

Occorre però considerare che è presente anche una *corrente di superficie*  $\tilde{\mathbf{J}}_z = \tilde{j}_s \hat{\mathbf{z}} \delta(x)$ , come è evidente dalla discontinuità di  $\mathbf{B}$  a  $x = 0$ :

$$\tilde{j}_s = \frac{1}{\mu_0} [\tilde{B}_y(0^+) - \tilde{B}_y(0^-)] = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0} B_0 . \quad (38)$$

La potenza dissipata dovuta alla corrente di superficie è

$$\langle j_s(t) E_z(0, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{j}_s \tilde{E}_z^*) = -\frac{\mu_r(\mu_r - 1) \omega B_0^2 \ell_s}{4\mu_0} . \quad (39)$$

Notare che  $E_z(0, t)$  è ben definito per la continuità della componente parallela di  $\mathbf{E}$  alla superficie di discontinuità. La potenza totale dissipata è allora uguale alla somma di (37) e (39), che fornisce la (34).