

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2016-2017

Compito di Fisica 2 (05/06/2017)

1

Il sistema in figura è costituito da un filo di lunghezza h sul quale si trova la carica Q uniformemente distribuita con densità lineare $\lambda = Q/h$, e una lamina cilindrica coassiale esterna di raggio $a \ll h$ e spessore trascurabile, sulla quale si trova la carica $-Q$ uniformemente distribuita sulla superficie. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Calcolare il campo elettrostatico $\mathbf{E}_s$ generato dalle cariche.

A $t = 0$ la lamina esterna viene messa in rotazione attorno al proprio asse (z) con velocità nota e assegnata $\omega = \omega(t)$ mantenuta da un opportuno motore meccanico. Supponendo che valga l'approssimazione di correnti lentamente variabili e che la corrente di spostamento sia trascurabile, calcolare al tempo t generico

b) il campo magnetico $\mathbf{B}$ generato dalla rotazione (si suppone che le cariche ruotino solidalmente alla lamina senza slittare);

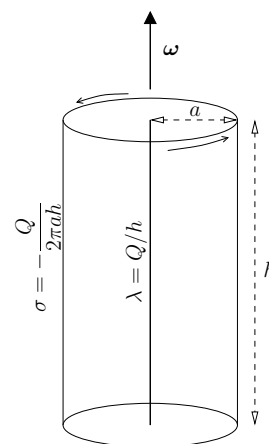
c) il campo elettrico $\mathbf{E}_i$ indotto dalla variazione temporale di $\mathbf{B}$;

d) il lavoro per unità di tempo (potenza meccanica) e il momento torcente totali esercitati da $\mathbf{E}_i$ sulle cariche;

e) il vettore di Poynting $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ e il suo flusso attraverso una superficie cilindrica di raggio r coassiale al sistema;

g) il momento angolare associato ai campi EM (la cui densità è $\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{S}/c^2$).

(18 punti)



2

In un mezzo materiale in quiete nel riferimento S del laboratorio e caratterizzato da una permittività dielettrica $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ (supposta reale nella regione di frequenze in esame) si possono propagare onde piane *elettrostatiche* e *longitudinali* di frequenza ω_L e aventi solo una componente del campo elettrico parallela al vettore d'onda $\mathbf{k}_L$. Nel caso $\mathbf{k}_L = k_L \hat{\mathbf{x}}$ il campo dell'onda si può scrivere

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{ik_L x - i\omega_L t}, \quad \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

a) Calcolare le densità di carica e di corrente nel mezzo associate ai campi (1).

b) Dare il valore della permittività dielettrica del mezzo $\varepsilon(\omega_L)$ corrispondente alla frequenza dell'onda (1). Si dia inoltre un valore per ω_L in funzione dei parametri del mezzo per un qualche modello noto.

c) Che assunzioni vanno fatte sui valori di E_0 e ω_L affinché il moto di un elettrone nel campo (1) sia oscillatorio alla frequenza ω_L , entro approssimazioni ben definite e da discutere?

d) Sia $\mathbf{V} = (\omega_L/k_L)\hat{\mathbf{x}}$ e si assuma $V/c = \omega_L/(k_L c) < 1$. Determinare la frequenza, il vettore d'onda e le espressioni del campo elettromagnetico e delle densità di carica e corrente nel riferimento S' in moto con velocità $\mathbf{V}$ rispetto a S .

e) Rispondere alle domande del punto **d)** per un riferimento S'' in moto rispetto a S con velocità $\mathbf{U} = U\hat{\mathbf{y}}$ (con $U < c$) cioè *ortogonale* a $\mathbf{k}_L$.

(15 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Equazione di continuità (ρ : densità di carica, $\mathbf{J}$: densità di corrente)

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (3)$$

Definizione di permittività dielettrica ε_r per un mezzo lineare

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad (4)$$

dove $\mathbf{P}$ è la densità di polarizzazione (momento di dipolo per unità di volume) e in generale $\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P}$.

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (5)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (6)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \beta \times \mathbf{B}c), \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \beta \times \mathbf{E}/c). \quad (7)$$

dove $\mathbf{V} = \beta c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , e “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

SOLUZIONI

1

a) Usiamo coordinate cilindriche con l'asse z coincidente con l'asse del condensatore. Per simmetria il campo elettrostatico $\mathbf{E}_s = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$. Utilizzando il teorema di Gauss si ha per $r < a$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h r} , \quad (8)$$

mentre $E_r = 0$ per $r > a$.

b) Per effetto della rotazione si genera una densità di corrente superficiale a $r = a$,

$$\boldsymbol{\iota} = (\sigma a \omega) \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{Q\omega}{2\pi h} \hat{\boldsymbol{\phi}} , \quad (9)$$

essendo $\sigma = -Q/(2\pi a h)$. Il campo magnetico è quindi $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$ per $r < a$, con

$$B_z = \mu_0 \iota = -\frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi h} , \quad (10)$$

mentre $B_z = 0$ per $r > a$.

c) Per simmetria il campo indotto $\mathbf{E}_i = E_\phi(r)$, e applicando il teorema di Stokes a una linea di forza si ottiene per $r < a$

$$E_\phi = -\frac{r}{2} \partial_t B_z = \frac{\mu_0 Q \dot{\omega} r}{4\pi h} = \frac{Q \dot{\omega} r}{4\pi \epsilon_0 h c^2} , \quad (11)$$

dove si è indicato $\dot{\omega} = d\omega/dt$. Analogamente, per $r > a$

$$E_\phi = \frac{Q \dot{\omega} a^2}{4\pi \epsilon_0 h c^2 r} , \quad (12)$$

d) Considerando un elemento infinitesimo di carica rotante $dq = \sigma_b dA$ sul cilindro esterno, il campo elettrico sviluppa una potenza meccanica

$$dW = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dq = E_\phi(a) \omega a \sigma dA , \quad (13)$$

per cui integrando banalmente su tutta la superficie

$$W = E_\phi(a) \omega a \sigma (2\pi a h) = -\frac{Q^2 \omega \dot{\omega} a^2}{4\pi \epsilon_0 h c^2} . \quad (14)$$

Se $\dot{\omega} > 0$ si ha $W < 0$ in quanto il campo indotto tende ad opporsi alla rotazione, esercitando un momento torcente $\mathbf{M}$ tale che $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = W$. Si ha allora

$$\mathbf{M} = -\frac{Q^2 a^2}{4\pi \epsilon_0 h c^2} \dot{\boldsymbol{\omega}} . \quad (15)$$

e) Il vettore di Poynting ha due componenti

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 (E_\phi B_z \hat{\mathbf{r}} - E_r B_z \hat{\boldsymbol{\phi}}) . \quad (16)$$

Per $r < a$ il flusso è

$$\Phi_s(r) = 2\pi r S_r = 2\pi \varepsilon_0 c^2 r E_\phi B_z = -\frac{Q^2 \omega \dot{\omega} r^2}{4\pi \varepsilon_0 h c^2} , \quad (17)$$

così che $\Phi_S(a) = W$ come deve (notare che $\mathbf{S} = 0$ per $r > a$).

g) Si ha

$$\boldsymbol{\ell} = -\varepsilon_0 r E_r B_z \hat{\mathbf{z}} = \frac{Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^2 h^2} \boldsymbol{\omega} , \quad (18)$$

che è uniforme, per cui il momento angolare totale dei campi è

$$\mathbf{L}_{\text{EM}} = \pi a^2 h \boldsymbol{\ell} = \frac{Q^2 a^2}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \boldsymbol{\omega} , \quad (19)$$

e si ha $\dot{\mathbf{L}}_{\text{EM}} = -\mathbf{M}$.

2

a) Ricaviamo le densità di carica e corrente sostituendo i campi (1) nelle equazioni di Maxwell

$$\rho = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = i\varepsilon_0 k_L E , \quad \mathbf{J} = -\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = i\omega_L \varepsilon_0 \mathbf{E} . \quad (20)$$

b) Dalla definizione di $\varepsilon(\omega)$,

$$-i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} , \quad (21)$$

che se $\mathbf{B} = 0$ ammette soluzioni non banali per $\mathbf{E}$ solo se $\varepsilon(\omega) = 0$.

Se ad esempio

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} , \quad (22)$$

si ha $\omega_L^2 = \omega_p^2 + \omega_0^2$.

c) L'equazione del moto per la posizione $X(t)$ lungo x dell'elettrone è

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} = -eE_0 \exp(ik_L X(t) - i\omega_L t) . \quad (23)$$

La soluzione oscillante richiede che $k_L X(t) \ll \omega$ così da trascurare il primo termine dell'esponente. In questo caso si ottiene

$$X(t) = \frac{eE_0}{m_e \omega_L^2} , \quad (24)$$

da cui la condizione

$$\frac{ek_L E_0}{m_e \omega_L^3} \ll 1 . \quad (25)$$

d) Utilizzando le trasformazioni di Lorentz per la frequenza e il numero d'onda ($\beta = V/c$)

$$\omega'_L = \gamma (\omega_L - V k_L) = 0 , \quad k'_L = \gamma (k_L - V \omega_L / c^2) = \gamma k_L (1 - \omega_L^2 / (k_L c)^2) = k_L / \gamma \quad (26)$$

(dove $\gamma^{-2} = 1 - \omega_L^2/(k_L c)^2 \equiv 1 - \beta^2$) e quelle per i campi elettromagnetici (si noti che il campo elettrico resta invariato dato che è parallelo al boost)

$$E'_0 = E_0 , \quad B'_0 = 0 . \quad (27)$$

Dalle equazioni di Maxwell ricaviamo nuovamente le densità di carica e corrente in S'

$$\rho' = i\varepsilon_0 k'_L E' = \rho/\gamma , \quad J'_x = i\omega'_L \varepsilon_0 E' = 0 , \quad (28)$$

in accordo con le trasformazioni di Lorentz della quadricorrente.

Banalmente i due invarianti di Lorentz $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $E^2 - c^2 B^2 = E_0^2$ sono gli stessi in S e S' , mentre l'invarianza del modulo della quadricorrente equivale a quella del quadrivettore d'onda

$$\rho^2 c^2 - J_x^2 = -\varepsilon_0^2 E^2 (k_L^2 c^2 - \omega_L^2) = -\varepsilon_0^2 (E')^2 (k'_L)^2 c^2 = (\rho')^2 c^2 \quad (29)$$

dove risulta

$$k_L^2 c^2 - \omega_L^2 = k_L^2 c^2 (1 - \beta^2) = k_L^2 c^2 / \gamma^2 = (k'_L)^2 c^2 . \quad (30)$$

e) Assumendo $\mathbf{U} = v\hat{\mathbf{y}} = \beta c\hat{\mathbf{y}}$, e utilizzando le trasformazioni di Lorentz per la frequenza e il numero d'onda (ora $\beta = U/c$)

$$\omega''_L = \gamma \omega_L , \quad \mathbf{k}''_L = (k_L, -\beta \gamma \omega_L / c, 0) \quad (31)$$

e quelle per i campi elettromagnetici (il campo elettrico in S è ora trasversale al boost)

$$E''_{x0} = \gamma E_0 , \quad B''_{z0} = \gamma \beta E_0 / c . \quad (32)$$

Le espressioni complete per i campi elettrico e magnetico in S'' sono le seguenti

$$\mathbf{E}'' = \gamma E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}''_L \cdot \mathbf{r}'' - i\omega''_L t''} , \quad \mathbf{B}'' = \gamma \beta \frac{E_0}{c} \hat{\mathbf{z}} e^{i\mathbf{k}''_L \cdot \mathbf{r}'' - i\omega''_L t''} . \quad (33)$$

In S'' la densità di carica è data da

$$\rho'' = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}'' = i\varepsilon_0 k''_x E'' = i\varepsilon_0 k_L \gamma E = \gamma \rho , \quad (34)$$

mentre la densità di corrente si ricava da

$$\mathbf{J}'' = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{B}'' - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}'' , \quad (35)$$

da cui si ottengono le due componenti (per brevità, omettiamo le fasi, invarianti di Lorentz)

$$J''_{x0} = \frac{1}{\mu_0} \partial_y B''_{z0} + i\omega''_L \varepsilon_0 E''_{x0} = i\omega_L \varepsilon_0 E_0 \gamma^2 (1 - \beta^2) = i\omega_L \varepsilon_0 E_0 = J_0 , \quad (36)$$

$$J''_{y0} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_x B''_{z0} = -\varepsilon_0 c k_L E_0 \gamma \beta = -\beta \gamma \rho c . \quad (37)$$

Rimangono da controllare gli invarianti: $\mathbf{E}'' \cdot \mathbf{B}'' = 0$ dato che i campi sono ortogonali, mentre

$$E''^2 - c^2 B''^2 = \gamma^2 E_0^2 - \gamma^2 \beta^2 E_0^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) E_0^2 = E_0^2 . \quad (38)$$

Infine, omettendo ancora le fasi

$$(\rho'')^2 c^2 - (J''_{x0})^2 - (J''_{y0})^2 = (\gamma \rho_0 c)^2 - J_0^2 - (\gamma \beta \rho_0 c)^2 = \gamma^2 (1 - \beta^2) \rho_0^2 c^2 - J_0^2 = \rho_0^2 c^2 - J_0^2 . \quad (39)$$