

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2017-2018

Compito di Fisica 2 (18/06/2018)

1

a) Si mostri che una sferetta di raggio a , perfettamente conduttrice, in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$ acquista il momento di dipolo elettrico $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0$.

b) Si mostri che una sferetta di raggio a , perfettamente diamagnetica, in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}_0$ acquista il momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = -2\pi a^3 \mathbf{B}_0 / \mu_0$.

Un'onda piana, monocromatica di frequenza ω e polarizzata linearmente, avente ampiezza del campo elettrico E_i , si propaga con vettore d'onda $\mathbf{k} = (\omega/c)\hat{\mathbf{x}}$ e incide su una sfera conduttrice di raggio $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$.

c) Assumendo che i campi siano perfettamente schermati all'interno della sfera, calcolare i momenti di dipolo elettrico $\mathbf{p}_s$ e magnetico $\mathbf{m}_s$ indotti nella sfera e il rapporto tra i loro moduli, discutendo le approssimazioni necessarie.

d) Tenendo conto dei termini di dipolo sia elettrico che magnetico, calcolare come dipende l'intensità della radiazione emessa nel piano xy dall'angolo θ rispetto a $\mathbf{k}$, sia nel caso di polarizzazione lungo y che di polarizzazione lungo z , indicando le direzioni di intensità massima e minima. (Suggerimento: mostrare che il campo elettrico in zona di radiazione dipende dal vettore $\mathbf{p}_s \times \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{m}_s/c$ e considerare che è richiesta *solo* la dipendenza dagli angoli; un disegno può aiutare.)

e) (facoltativo) Qual'è la dipendenza da θ per luce "non polarizzata"? (Si intende che la radiazione incidente è composta da pacchetti d'onda quasi monocromatici ma di durata finita e la cui polarizzazione cambia in modo casuale da un pacchetto al successivo. Si assume inoltre che la radiazione diffusa venga misurata integrando su tempi lunghi rispetto alla durata dei singoli pacchetti.)

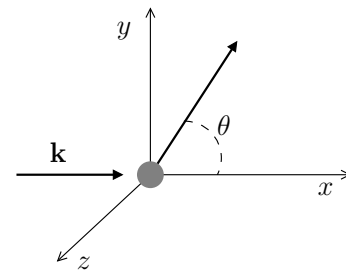


Figura 1

2

Un filo conduttore cilindrico infinito ha sezione $A = \pi a^2$, conducibilità σ ed è immerso in un campo elettrico costante e uniforme $\mathbf{E}_0$, parallelo al filo.

a) Calcolare la potenza dissipata nel filo e il flusso del vettore di Poynting sulla sua superficie esterna (entrambi definiti per unità di lunghezza), confrontandone i valori.

Si osserva ora il filo da un riferimento S' in moto rispetto al laboratorio con velocità $\mathbf{V}$ perpendicolare al filo (e quindi a $\mathbf{E}_0$). Si assuma $V \ll c$ considerando nel seguito solo termini del primo ordine in V/c .

b) Calcolare il campo elettromagnetico e le densità di carica e corrente in S' .

c) Mostrare che in S' esiste una forza netta sul filo e determinarne il valore (per unità di lunghezza). È facoltativo discutere l'origine fisica di tale forza.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$ in assenza di cariche “libere”

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ in assenza di correnti “libere”

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} \equiv \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (3)$$

Campo elettrico interno a una sfera con polarizzazione elettrica uniforme $\mathbf{P}$

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Campi di radiazione di dipolo elettrico e magnetico

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2}, \quad \mathbf{E}_m = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{m}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^3}. \quad (5)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (6)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (7)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (8)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , e “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Quadriforza relativistica per unità di volume

$$f_\mu = F_{\mu\nu} J^\nu = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}/c, \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (9)$$

SOLUZIONI

1

a) La carica indotta sulla sfera è equivalente a una polarizzazione uniforme $\mathbf{P}$ che genera il campo indotto $\mathbf{E}_{\text{ind}} = -\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$, come dimostrabile ad esempio col modello di due sfere di carica opposta e centri leggermente separati. Posto quindi $\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\text{ind}} = 0$, si ha $\mathbf{P} = 3\epsilon_0\mathbf{E}_0$ da cui $\mathbf{p} = (4\pi/3)a^3\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 a^3\mathbf{E}_0$.

b) Sfruttando l'analogia tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ e tra $\mathbf{P}$ e $\mathbf{M}$, si ottiene che una magnetizzazione uniforme genera $\mathbf{H}_{\text{ind}} = -\mathbf{M}/3$ ovvero $\mathbf{B}_{\text{ind}} = 2\mu_0\mathbf{M}/3$, da cui $\mathbf{M} = -(3/2\mu_0)\mathbf{B}_0$ e $\mathbf{m} = -2\pi a^3\mathbf{B}_0/\mu_0$.

c) Per dimensioni della sferetta piccole rispetto alla lunghezza d'onda il campo può essere preso approssimativamente uniforme. Le condizioni al bordo sono le stesse del caso statico e quindi la soluzione per i momenti di dipolo indotti è identica a quella descritta in a)-b) prendendo per $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{B}_0$ i campi dell'onda incidente, quindi $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_i$ $\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i/c$ dove $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/k$. Si ha allora

$$\mathbf{p}_s = 4\pi a^3 \mathbf{E}_i, \quad \mathbf{m}_s = -\frac{c}{2} \mathbf{p}_s \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (10)$$

Si ha $p_s/m_s = 2/c$.

d) Il campo elettrico in zona di radiazione è

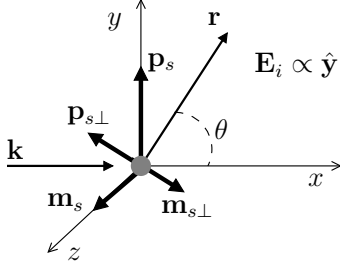
$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{k_0}{rc^2} \left(\ddot{\mathbf{p}}_s \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{\ddot{\mathbf{m}}_s}{c} \right) \times \hat{\mathbf{r}}, \quad (11)$$

ovvero, per un campo monocromatico di frequenza ω

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\frac{k_0\omega^2}{rc^2} \left(\mathbf{p}_s \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{m}_s}{c} \right) \times \hat{\mathbf{r}}. \quad (12)$$

Consideriamo come richiesto $\hat{\mathbf{r}}$ nel piano xy , ovvero $\hat{\mathbf{r}} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Se $\mathbf{E}_i$ è lungo y , allora (vedi Fig.2 dove $\mathbf{p}_{s\perp} \equiv (\mathbf{p}_s \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{m}_{s\perp} \equiv$



$\mathbf{m}_s \times \hat{\mathbf{r}}$

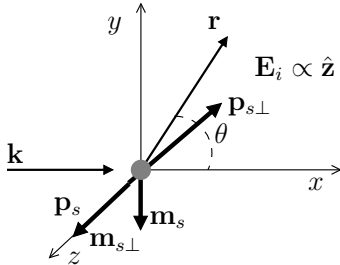
$$\mathbf{p}_s \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{m}_s}{c} = \left(p_s \cos\theta + \frac{m_s}{c} \right) \hat{\mathbf{z}} = p \left(\cos\theta - \frac{1}{2} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (13)$$

e $|\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}| = 1$. Quindi

$$|\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 \propto \left(\cos\theta - \frac{1}{2} \right)^2. \quad (14)$$

Si ha intensità nulla per $\cos\theta = 1/2$ ovvero $\theta = \pi/4$, e intensità massima per $\theta = \pi$ cioè per diffusione all'indietro.

Per il caso di $\mathbf{E}_i$ lungo z si procede in maniera analoga (Fig.3). Si ha



$$(\mathbf{p}_s \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{p}_s, \quad \mathbf{m}_s \times \hat{\mathbf{r}} = m_s \hat{\mathbf{z}} \sin(\theta + \pi/2) = \frac{c}{2} \mathbf{p}_s \cos\theta, \quad (15)$$

da cui

$$|\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 \propto \left(1 - \frac{1}{2} \cos\theta \right)^2. \quad (16)$$

Figura 3

In questo caso si ha sempre il massimo di diffusione all'indietro mentre il minimo è per diffusione in avanti ($\theta = 0$) ma non si ha mai intensità nulla.

e) Poiché la variazione casuale della polarizzazione rende il problema della diffusione a simmetria cilindrica, si può sommare incoerentemente la radiazione emessa nei due casi di polarizzazione lungo y e lungo z , ottenendo

$$|\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 \propto \frac{5}{4}(1 + \cos^2 \theta) - 2 \cos \theta . \quad (17)$$

2

a) La potenza dissipata nel filo è, per unità di lunghezza

$$P_d = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E})\pi a^2 = \pi a^2 \sigma E_0^2 . \quad (18)$$

Il campo magnetico a $r = a$ si trova dal teorema di Stokes:

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{2} J a = \frac{\mu_0 a}{2} \sigma E_0 . \quad (19)$$

Dato che il campo elettrico è continuo all'interfaccia tra vuoto e conduttore, il vettore di Poynting a $r = a$ è

$$\mathbf{S}(a) = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{a}{2} \sigma E_0^2 \hat{\mathbf{r}} . \quad (20)$$

Il flusso per unità di lunghezza è

$$\Phi(\mathbf{S}) = -S(a)2\pi a = -\pi a^2 \sigma E_0^2 = -P_d \quad (21)$$

b) Al primo ordine in $\beta = V/c$, $\mathbf{E}' \simeq \mathbf{E}_0 + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{\text{filo}}$ e $\mathbf{B}' \simeq -(\mathbf{V}/c^2)\mathbf{E}_0 + \mathbf{B}_{\text{filo}} \equiv \mathbf{B}'_0 + \mathbf{B}_{\text{filo}}$. Notare che $\mathbf{B}_{\text{filo}}$ è ora espresso in funzione delle coordinate trasformate ($x' \simeq x - Vt$, $y' = y$, $z' = z$), ovvero

$$\mathbf{B}'_{\text{filo}} \simeq \mathbf{B}_{\text{filo}}(x' + Vt', y', x') , \quad (22)$$

e analogamente per il termine aggiuntivo al campo elettrico. La dipendenza dalle coordinate è banale per il campo esterno uniforme.

Inoltre si ha esattamente $\mathbf{J}' = \mathbf{J}$ e $\rho' = 0$ essendo $\mathbf{J}$ trasversale a $\mathbf{V}$.

c)

La forza per unità di lunghezza sul filo percorso da corrente è

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{J}' \times \mathbf{B}'_0 \pi a^2 \simeq -I E_0 \mathbf{V} \quad (I = \pi a^2 J) \quad (23)$$

Questo è consistente con le trasformazioni della quadriforza esercitata dal campo esterno per unità di volume (nel seguito trascuriamo la auto-forza di “strizzamento” che non dà contributo). Nel sistema S del laboratorio

$$f_\mu = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_0/c, \mathbf{0}) . \quad (24)$$

In S' , al primo ordine in β

$$f'_\mu \simeq (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_0/c, -\mathbf{V}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_0)/c, 0, 0) . \quad (25)$$

Moltiplicando f'_1 per la sezione A del filo (che è invariante nel limite $\beta \ll 1$) si ottiene F' . (Notare che la norma di f_μ è conservata solo al primo ordine in β .)

Fisicamente, l'esistenza di un termine di dissipazione indica che nel filo l'energia “a riposo” di natura termica aumenta nel tempo: il moto a velocità uniforme in S' richiede quindi una forza netta a causa del corrispondente aumento di inerzia.