

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2018-2019

Compito di Fisica 2 (18/06/2019)

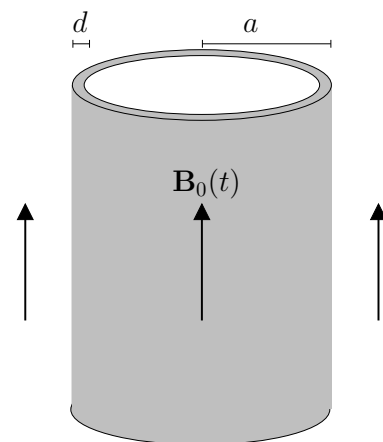
1

Una sottile lamina conduttrice ha forma cilindrica con raggio a , spessore $d \ll a$, altezza $\gg a$ ed è costituita da un metallo Ohmico di conducibilità σ . La lamina si trova in un campo magnetico uniforme e oscillante $\mathbf{B}_0(t) = \hat{\mathbf{z}}B_0 \cos(\omega t) = \text{Re}(\hat{\mathbf{z}}B_0 e^{-i\omega t})$ parallelo al proprio asse. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Calcolare il campo magnetico all'interno della lamina usando l'approssimazione di campi e correnti lentamente variabili e trascurando la corrente di spostamento, specificando le condizioni di validità delle approssimazioni; si diano stime numeriche rappresentative di Rame o Argento ($\sigma \simeq 6 \times 10^7$ unità SI) alla frequenza di rete (50 Hz).

b) Calcolare il flusso totale di energia EM attraverso le superfici della lamina e mostrare che è uguale alla potenza dissipata nel conduttore.

c) Si calcoli ora il campo magnetico all'interno della lamina assumendo che sia uniforme e che la corrente di spostamento sia trascurabile ma che *non* valga l'approssimazione di correnti lentamente variabili, confrontando il risultato con quanto ottenuto al punto **a**).



2

Un elettrone si muove verso un protone, sotto effetto dell'attrazione Coulombiana, partendo dall'infinito con velocità iniziale nulla. Calcolare:

a) la velocità v dell'elettrone in funzione della distanza r dal protone assumendo moto non relativistico, stimando a posteriori la distanza tipica r_1 alla quale l'assunzione cade (per fissare le idee si può porre come limite che $v < c/\sqrt{10}$).

b) la potenza istantanea irradiata in funzione di r , in approssimazione di dipolo elettrico;

c) l'energia totale $U_{\text{irr}} = U_{\text{irr}}(r)$ persa per irraggiamento di dipolo elettrico lungo la traiettoria sino alla distanza r , assumendo che sia trascurabile rispetto all'energia cinetica dell'elettrone ma stimando a posteriori la distanza r_2 alla quale l'assunzione cade. Discutere il risultato.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (2)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} , \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (3)$$

Raggio classico dell'elettrone

$$r_c = \frac{k_0 e^2}{m_e c^2} . \quad (4)$$

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2 , \quad k_0 = 1/(4\pi \varepsilon_0) . \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a)

Nell'approssimazione di campi e correnti lentamente variabili calcoliamo il campo elettrico indotto $\mathbf{E}_1$ dall'equazione approssimata $\nabla \times \mathbf{E}_1 \simeq -\partial_t \mathbf{B}_0$. Il campo $\mathbf{E}_1$ ha simmetria solenoidale, con la sola componente non nulla

$$E_{1\phi} = E_{1\phi}(r, t) \simeq +\frac{1}{2}\omega r B_0 \sin \omega t . \quad (6)$$

Per lamina sottile consideriamo la corrente uniforme nel suo spessore, ovvero $\mathbf{J}_1 \simeq \sigma \mathbf{E}_1(a)$. Il campo magnetico generato è quindi equivalente a quello di un solenoide con corrente superficiale $\mathbf{J}_1 d$. Quindi si ha $\mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{z}} B_1 \sin \omega t$ ($r < a$) con

$$B_1 \simeq \mu_0 \sigma J_1 d = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a d B_0 = \frac{\omega a d}{2c^2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} B_0 \quad (7)$$

Affinché $B_1 \ll B_0$ deve essere

$$\frac{\omega a d}{2c^2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \ll 1 . \quad (8)$$

Si ha $\tau = \varepsilon_0 / \sigma \simeq 1.5 \times 10^{-19}$ s (tipico tempo di rilassamento di carica in un conduttore) e quindi $c^2 \tau \simeq 1.4 \times 10^{-2}$ m²s⁻¹. Se $\omega = 2\pi \times 50$ Hz si ha $2c^2 \tau / \omega \simeq 10^{-4}$ m². Quindi deve essere $ad \ll 0.8 \times 10^{-4}$ m² affinché $B_1 \ll B_0$.

La corrente di spostamento è trascurabile se $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \gg \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \sim \varepsilon_0 \omega \mathbf{E}$ ovvero se $\omega \ll \tau^{-1}$. Quindi è del tutto trascurabile alla frequenza in esame.

b) Il campo $\mathbf{B}_1$ è discontinuo attraverso la lamina essendo nullo per $r > a$. Quindi i valori del vettore di Poynting sui due lati della superficie della lamina sono

$$\mathbf{S}(a^-) = \varepsilon_0 c^2 E_1 (B_0 + B_1) \hat{\mathbf{r}} , \quad \mathbf{S}(a^+) = \varepsilon_0 c^2 E_1 B_0 \hat{\mathbf{r}} . \quad (9)$$

Il flusso di energia EM attraverso la superficie (per unità di altezza) è quindi

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi a (S(a^+) - S(a^-)) = 2\pi a E_1 B_1 = 2\pi a \varepsilon_0 c^2 (\mu_0 \sigma d E_1^2) = 2\pi a d (\sigma E_1^2) , \quad (10)$$

che è la potenza dissipata nella lamina nell'approssimazione in cui J_1 è uniforme.

c)

In funzione del campo totale interno $\mathbf{B}$, si ha $E_\phi = -\frac{1}{2}\omega r \partial_t B_z$. Si può anche scrivere il campo $\mathbf{B}$ come somma del campo esterno $\mathbf{B}_0$ più quello generato dalla corrente. In notazione complessa

$$B = B_0 + \mu_0 d J = B_0 + \mu_0 d \sigma E_1(a) = B_0 + \frac{a}{2} \mu_0 d \sigma (i\omega B) , \quad (11)$$

il che fornisce

$$B = \frac{B_0}{1 - i\omega \mu_0 a d \sigma / 2} . \quad (12)$$

Il limite di campi lenti si ottiene al primo ordine in $\omega \mu_0 a d \sigma / 2 \ll 1$:

$$B \simeq B_0 (1 + i\omega \mu_0 a d \sigma / 2) , \quad (13)$$

ovvero, tornando alla notazione reale

$$B_1 = \text{Re} \left(\frac{i}{2} \omega \mu_0 a d \sigma B_0 e^{-i\omega t} \right) = \frac{1}{2} \omega \mu_0 a d \sigma B_0 \sin \omega t = \frac{\omega a d \sigma}{\varepsilon_0 c^2} B_0 \sin \omega t . \quad (14)$$

2

a) Con le condizioni iniziali date, il moto della particella è radiale (sono nulli il parametro d'impatto ovvero il momento angolare). Dalla conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{m_e v^2}{2} - \frac{k_0 e^2}{r} = 0 \quad (15)$$

si ottiene per v

$$v = - \left(\frac{2k_0 e^2}{m_e r} \right)^{1/2} = -c \left(\frac{2r_c}{r} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

dove $r_c = k_0 e^2 / m_e c^2$ è il raggio classico dell'elettrone.

Posto $v \ll c$ si ottiene $(r/2r_c)^{1/2} \gg 1$, ovvero l'assunzione di moto non relativistico cade a distanze prossime a r_c che quindi fornisce una stima grossolana per r_1 . Se si impone una velocità limite $v = c/\sqrt{10}$ si ottiene $r_1 = 20r_c$.

b) La derivata seconda del momento di dipolo è proporzionale all'accelerazione e quindi all'inverso del quadrato della distanza:

$$\ddot{p} = -e\ddot{r} = \frac{k_0 e^3}{m_e r^2}, \quad (17)$$

quindi la potenza istantanea irraggiata in funzione di $r = r(t)$ è

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{p}|^2 = \frac{2}{3} \frac{k_0^3 e^6}{m_e^2 r^4 c^3} = \frac{2k_0 e^2 r_c^2 c}{3r^4}. \quad (18)$$

c) Integrando lungo la traiettoria si ottiene

$$\begin{aligned} U_{\text{irr}}(r) &= \int_{-\infty}^{t(r)} P(t) dt = \int_{-\infty}^r P(r') \frac{dr'}{|v(r')|} = \frac{2k_0 e^2 r_c^2 c}{3} \frac{1}{\sqrt{2} c r_c^{1/2}} \int_{-\infty}^r r'^{-7/2} dr' \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{15} \frac{k_0 e^2 r_c^{3/2}}{r^{5/2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Posto $U_{\text{irr}}(r) \ll K(r) = k_0 e^2 / r$, otteniamo la condizione

$$r \gg r_c \left(\frac{2\sqrt{2}}{15} \right)^{2/3} = 0.329 r_c. \quad (20)$$

Se si pone $U_{\text{irr}}(r_2) = 10^{-1} K(r_2)$ si ottiene $r_2 \simeq 1.04 r_c$. Poiché tendenzialmente $r_2 < r_1$, una stima accurata delle perdite per irraggiamento dovrebbe tenere conto del carattere relativistico del moto.