Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2A (27/06/2022)

1

Il sistema in figura è costituito da un rotatore di momento di inerzia $\mathcal{I}$ avente bracci conduttori di raggio a connessi al circuito da contatti striscianti come in figura. La geometria è tale che il contatto è mantenuto sempre e solo con un braccio durante la rotazione. Non sono presenti né attriti né coppie meccaniche. Nel circuito è presente un generatore di tensione costante V_0 e la resistenza R è assunta anch'essa costante (si trascurano variazioni di lunghezza del circuito). Il sistema è immerso in un campo magnetico $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$ uniforme, perpendicolare al piano del rotatore.

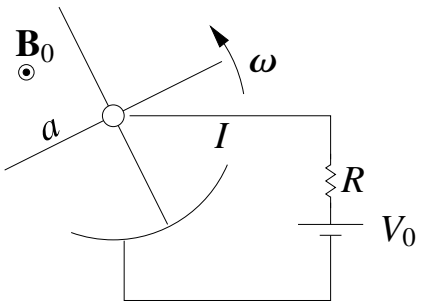

Figura 1

Mostrare che
a) la forza elettromotrice indotta $\mathcal{E} = B_0 a^2 \omega/2$ con $\omega = \omega(t)$ la velocità angolare istantanea;
b) il momento delle forze magnetiche sul rotatore $\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{z}} B_0 a^2 I/2$ con $I = I(t)$ l'intensità di corrente istantanea;
c) la variazione temporale di energia cinetica del rotatore è data dalla somma dalle potenze dissipata dalla resistenza ed erogata dal generatore. (Suggerimento: si scrivano preliminarmente I in funzione di $\mathcal{E}$, V_0 e R e l'equazione del moto per $\boldsymbol{\omega}$.)
d) Assunto $V_0 = 0$, si determini l'evoluzione temporale di $\omega(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\omega(0) = \omega_0$. (Facoltativo: generalizzare a $V_0 \neq 0$).

2

Nel sistema del laboratorio S è presente sul piano $x = 0$ una distribuzione superficiale di carica $\sigma = \sigma(y)$ che genera il potenziale elettrostatico

$$\Phi = \Phi(x, y) = \Phi_0 \mathrm{e}^{-q|x|} \cos(ky) \qquad (q, k > 0)\,. \tag{1}$$

a) Dimostrare che $q = k$.
b) Calcolare $\sigma = \sigma(y)$.
Si consideri ora un sistema S' in moto con velocità uniforme $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{y}}$ rispetto a S.
c) Calcolare in S' i potenziali scalare $\Phi' = \Phi'(x', y', t')$ e vettore $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(x', y', t')$.

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\ . \tag{2}$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f}=Id\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}\ . \tag{3}$$

Definizione di forza elettromotrice in un circuito

$$\mathcal{E}=\oint(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(\mathbf{B})\ , \tag{4}$$

dove l'integrale di linea è eseguito sul circuito, $\mathbf{V}$ è la velocità locale dell'elemento di circuito e Φ è il flusso del campo magnetico che attraversa il circuito.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu=(A_0,\mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V}=\boldsymbol{\beta}c$

$$A_0'=\gamma(A_0-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A})\ ,\qquad A_\parallel'=\gamma(A_\parallel-\beta A_0)\ ,\qquad \mathbf{A}_\perp'=\mathbf{A}_\perp\ , \tag{5}$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$.

SOLUZIONI

1

a) Contribuisce solo il braccio del rotatore che fa contatto. Abbiamo così per la forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^a \omega r B_0 \mathrm{d}r = \frac{B_0 a^2 \omega}{2} \,, \tag{6}$$

dove $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ è la velocità del punto del braccio a distanza $\mathbf{r}$ dal centro di rotazione. $\mathcal{E}$ è positiva (senso orario) se $\boldsymbol{\omega}$ è parallela a $\mathbf{B}_0$, negativa se è antiparallela. La figura rappresenta il caso di $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{B}_0$ paralleli.

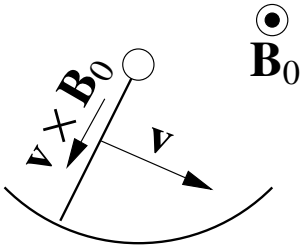

Figura 2

b) Anche qui contribuisce solo il braccio a contatto. Su un tratto del braccio di lunghezza $\mathrm{d}\ell$ agisce una forza

$$\mathrm{d}\mathbf{f} = I \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}_0 \,, \tag{7}$$

dove I è la corrente che circola nel circuito, e $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ ha il verso del flusso della corrente. Il vettore $\mathrm{d}\mathbf{f}$ è così perpendicolare al braccio, e per il momento meccanico $\boldsymbol{\tau}$ abbiamo

$$\boldsymbol{\tau} = \int \mathbf{r} \times (I \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}_0) = -\hat{\mathbf{z}} \int_0^a r I B_0 \mathrm{d}r = -\hat{\mathbf{z}} \, \frac{B_0 a^2 I}{2} \,, \tag{8}$$

dove $\hat{\mathbf{z}}$ è il versore perpendicolare al piano della figura, parallelo a $\mathbf{B}_0$. Il momento è positivo (imprime una rotazione in senso antiorario) se I è negativa (circola in senso orario), e viceversa.

c) La corrente è data da

$$I = \frac{V_0 + \mathcal{E}}{R} = \frac{2V_0 + B_0 a^2 \omega}{2R} \,, \tag{9}$$

dove V_0 è positivo se il generatore è inserito come in Fig. 1, cioè se di per sè farebbe circolare la corrente in senso antiorario, negativo altrimenti.

L'equazione del moto è

$$\mathcal{I} \, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \tau \,, \tag{10}$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è dato dalla (8) e I dalla (9).

L'equazione del moto si scrive quindi

$$\mathcal{I} \, \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{2B_0 a^2 V_0 + B_0^2 a^4 \omega}{4R} = -\frac{B_0^2 a^4}{4R} \left(\omega + \frac{2V_0}{B_0 a^2} \right) \,, \tag{11}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{B_0^2 a^4}{4\mathcal{I}R} \, \omega = -\frac{a^2 V_0 B_0}{2\mathcal{I}R} \,, \tag{12}$$

L'energia cinetica del rotore è $\mathcal{I}\omega^2/2$. Per la sua derivata temporale abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathcal{I}\omega^2}{2} \right) = \mathcal{I}\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\omega \, \frac{2B_0 a^2 V_0 + B_0^2 a^4 \omega}{4R} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2} \, \frac{B_0 a^2 \omega + 2V_0}{2R} = -\mathcal{E} I \,, \tag{13}$$

dove abbiamo usato la (11), la (6) e la (9). Usando ancora la prima delle (9) abbiamo $\mathcal{E} = IR - V_0$, che, inserita bell'ultima delle (13) dà

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathcal{I}\omega^2}{2}\right) = -RI^2 + V_0 I \ , \tag{14}$$

Il termine $(-RI^2)$ rappresenta in ogni caso una dissipazione di energia. Il segno di V_0 può invece essere scelto in modo che il generatore fornisca o assorba parte dell'energia cinetica.
d) La soluzione della (11) è

$$\omega(t) = \omega_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} + \omega_\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \ , \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{4\mathcal{I}R}{a^4 B_0^2} \ , \quad \omega_\infty = -\frac{2V_0}{a^2 B_0} \ , \tag{15}$$

ω_0 è la velocità angolare iniziale. In assenza di generatore, $V_0 = 0$, il rotore inizialmente in rotazione con velocità angolare ω_0 si fermerà asintoticamente ($\omega_\infty = 0$). In presenza di generatore la velocità angolare raggiungerà asintoticamente il valore ω_∞, indipendentemente da ω_0 .

2

a) All'esterno del piano ($x \neq 0$), il potenziale deve soddisfare l'equazione di Laplace, ovvero:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \Phi(x,y) = \Phi(x,y)(q^2 - k^2) = 0 \tag{16}$$

che implica $q = k$.
b) Il campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E}(x,y) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi(x,y) = k\Phi_0 \mathrm{e}^{-k|x|}(\mathrm{sgn}(x)\cos(ky), \sin(ky), 0) \tag{17}$$

da cui si ricava

$$\sigma(0,y) = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E}_{x\sim 0^+} - \mathbf{E}_{x\sim 0^-}\right)_\perp = 2\varepsilon_0 k \Phi_0 cos(ky). \tag{18}$$

c) Il quadripotenziale $\mathcal{A}_\mu = (\Phi/c, \mathbf{0})$ in S. Applicando le trasformazioni di Lorentz si trova

$$\Phi' = \mathcal{A}'_0 = -\gamma\Phi \, , \qquad A'_y = \mathcal{A}'_2 = -\beta\gamma\Phi/c \, , \qquad A'_x = A'_z = 0 \, . \tag{19}$$

In queste espressioni $\Phi = \Phi[x(x',y',t'), y(x',y',t')]$, ovvero Φ va espresso in funzione delle coordinate in S'. Usando le relazioni

$$x = x' \, , \qquad y = \gamma(y' + Vt') \, , \tag{20}$$

si trova alfine

$$\Phi' = -\gamma\Phi_0 \mathrm{e}^{-k|x'|} \cos[\gamma k(y' + Vt')] \, , \qquad A'_y = -\beta\Phi'/c. \tag{21}$$

Il campo elettromagnetico in S' appare quindi come un'onda superficiale con velocità di fase V e frequenza $\gamma k V$.