

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (26/06/2023)

1

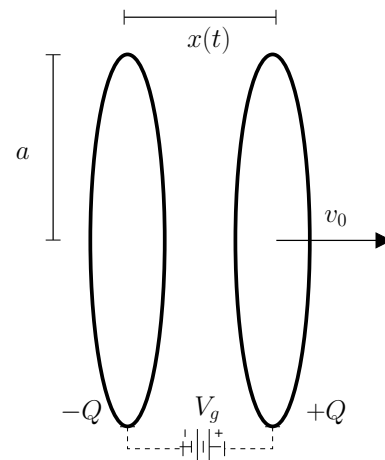
Si consideri un condensatore piano formato da due armature parallele circolari di raggio a , inizialmente a distanza $x_0 \ll a$. Una delle due armature ha massa m e può scorrere liberamente in direzione ortogonale a sè stessa e a $t = 0$ ha velocità v_0 . Nel seguito si assuma che per la posizione dell'armatura mobile $x(t) \ll a$ così che effetti di bordo siano sempre trascurabili.

a) Supponendo che le armature siano isolate e che su esse siano presenti le cariche $\pm Q$, calcolare la distanza x_f alla quale l'armatura si ferma. Si dia una stima numerica per $x_0 = 10^{-2}$ m, $a = 2$ m, $m = 3$ kg, $v_0 = 5 \times 10^{-3}$ m/s, $Q = 10^{-6}$ C.

Supponendo adesso che le armature siano connesse da un generatore ideale di tensione costante $V_g = 100$ V:

b) determinare la condizione per cui l'armatura si ferma e la posizione x_f in cui ciò avviene (per una stima numerica si usino i valori del punto precedente);

c) scrivere il flusso del vettore di Poynting attraverso il condensatore e la potenza scambiata col generatore (specificando se erogata o assorbita), entrambi in funzione della posizione $x(t)$ o della velocità $v(t) = \dot{x}(t)$.



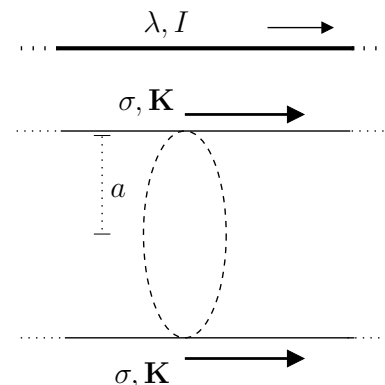
2

Su un cilindro infinito di raggio a nel sistema L del laboratorio si trova una densità di carica per unità di lunghezza λ e scorre un'intensità di corrente parallela all'asse I , entrambe distribuite sulla superficie (la densità superficiale $\sigma = \lambda/(2\pi a)$ e la corrente superficiale $\mathbf{K} = \hat{\mathbf{z}}I/(2\pi a)$).

a) Calcolare i campi elettrico e magnetico e la pressione totale alla superficie del cilindro.

b) Considerato un sistema L' in moto rispetto a L con velocità $V = \beta c$ parallelamente all'asse del cilindro, si determinino le condizioni su λ e I per cui in L' si abbia $\lambda' = 0$ oppure $I' = 0$ per opportuni valori di β .

c) Calcolare la pressione alla superficie del cilindro in L' per un valore generico di β .



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2, \quad (1)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Capacità di un condensatore piano con armature di superficie A parallele a distanza h

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{h}. \quad (3)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x. \quad (4)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (5)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (6)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (7)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

SOLUZIONI

1

a) Applichiamo la conservazione dell'energia. L'energia cinetica iniziale si trasforma completamente in energia elettrostatica ed è quindi uguale alla differenza tra l'energia elettrostatica finale ed iniziale:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{\epsilon_0}{2}E_0^2\pi a^2(x_f - x_0) \quad (8)$$

dove $E_0 = Q/(\epsilon_0\pi a^2) = 10^4$ V/m è il campo interno al condensatore. Allo stesso risultato si arriva notando che sull'armatura agisce una forza frenante di modulo $F = \pi a^2(\epsilon_0 E_0^2/2)$.

Numericamente

$$x_f = x_0 + \frac{mv_0^2}{\pi a^2 \epsilon_0 E_0^2} = x_0 + 10^{-2} \text{ m} = 2 \times 10^{-2} \text{ m} . \quad (9)$$

b) Quando le armature sono distanti $x(t)$ il campo elettrico vale

$$E(t) = \frac{V_g}{x(t)} . \quad (10)$$

La forza sull'armatura si calcola dalla tensione elettrostatica,

$$F(t) = -\frac{\epsilon_0}{2}E^2(t)\pi a^2 = -\frac{\epsilon_0\pi a^2}{2} \frac{V_g^2}{x^2(t)} . \quad (11)$$

Si ha quindi

$$F = -\partial_x \left(-\frac{\epsilon_0\pi a^2}{2} \frac{V_g^2}{x(t)} \right) \equiv -\partial_x U(x) , \quad (12)$$

dove $U(x)$ è l'energia potenziale associata al moto dell'armature. Si poteva arrivare alla forma di $U(x)$ anche ricordando che l'energia potenziale totale del sistema $U(x) = -U_{\text{es}}(x)$, ovvero

$$U(x) = -\frac{1}{2}CV_g^2 = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0\pi a^2}{x} V_g^2 . \quad (13)$$

Usando nuovamente la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) . \quad (14)$$

Quindi l'armatura si ferma se $v = 0$ per un certo x ovvero se

$$0 > \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\epsilon_0\pi a^2}{2} \frac{V_g^2}{x_0} \quad (15)$$

(espressione valida sotto la condizione $x(t) \ll a$).

La condizione limite dà

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_f} = \frac{mv_0^2}{\epsilon_0\pi a^2 V_g^2} , \quad (16)$$

da cui $x_f = 4 \times 10^{-2}$ m.

c) Il campo magnetico solenoidale generato dalla corrente di spostamento vale, a distanza a dall'asse,

$$B_\phi = -\frac{a}{2c^2} V_g \frac{\dot{x}}{x^2} . \quad (17)$$

Il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie laterale del condensatore vale

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi a x \varepsilon_0 c^2 E B_\phi = -\pi a^2 \varepsilon_0 V_g^2 \frac{\dot{x}}{x^2} . \quad (18)$$

La corrente che scorre nel circuito è

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = V_g \frac{dC}{dt} = -\varepsilon_0 V_g \pi a^2 \frac{\dot{x}}{x^2} , \quad (19)$$

da cui la potenza assorbita dal generatore è

$$P = VI = \Phi(\mathbf{S}) . \quad (20)$$

2

a) I campi elettrico e magnetico generati dalla distribuzione di carica e corrente sono, per $r \geq a$,

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} , \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} , \quad (21)$$

mentre $E_r = 0$ e $B_\phi = 0$ per $r < a$. La forza per unità di superficie è la somma dei termini di tensione elettrica e pressione magnetica,

$$P_{\text{tot}} = P_E + P_B = \frac{\varepsilon_0}{2} E_r^2(a) - \frac{1}{2\mu_0} B_\phi^2(a) = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_r^2(a) - B_\phi^2(a) c^2) . \quad (22)$$

b) Dalle trasformazioni della quadricorrente discendono quelle per $(\lambda c, I)$:

$$\lambda' = \gamma(\lambda - \beta I/c) , \quad I' = \gamma(I - \beta \lambda c) . \quad (23)$$

Se $\lambda < I/c$ si può scegliere $\beta = \lambda c/I$ e ottenere $\lambda' = 0$. Se $\lambda > I/c$ si può scegliere $\beta = I/\lambda c$ e ottenere $I' = 0$.

Si può anche passare dalle trasformazioni dei campi osservando che se $\lambda' = 0$ allora $E'_r = 0$ e che se $I' = 0$ allora $B'_\phi = 0$. Si può anche ragionare con gli invarianti di Lorentz $\lambda^2 c^2 - I^2$ ed $E^2 - B^2 c^2$.

c) Basta osservare dalla Eq.(22) che P_{tot} è invariante.