Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2023-2024

Compito di Fisica 2 (26/06/2024)

1

Un elettrone libero descritto dall'equazione classica del moto

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{dt}} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1}$$

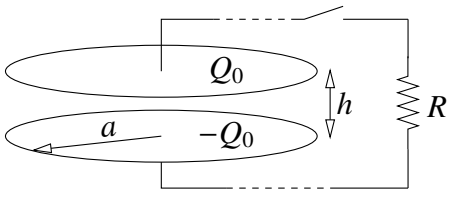
si trova nel campo di un'onda EM monocromatica piana linearmente polarizzata il cui campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x,t) = E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(kx - \omega t) = \mathrm{Re}\left[E_0 \hat{\mathbf{y}} \mathrm{e}^{i(kx-\omega t)}\right] \ . \tag{2}$$

a) Si dica per quali valori di E_0 e la corrispondente intensità dell'onda si può assumere una dinamica non relativistica e trascurare il termine magnetico nella (1). Si diano valori numerici per lunghezze d'onda $\lambda = 1$ μm e $\lambda = 10$ nm.
b) Si risolva approssimativamente l'equazione (1) in modo iterativo considerando prima l'effetto solo di $\mathbf{E}$ e usando il risultato per calcolare l'effetto del termine $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.
c) Sulla base dei risultati del punto **b)** si discuta la radiazione diffusa, dicendo quali frequenze si osservano, in che direzioni l'intensità è nulla o massima per ciascuna frequenza e la corrispondente polarizzazione.

2

Un condensatore piano è formato da due armature metalliche parallele e circolari, aventi raggio a e mutua distanza $h \ll a$, sulle quali per $t \leq 0$ si trovano le cariche $\pm Q_0$. Il condensatore è collegato a un circuito esterno con resistenza R mediante fili conduttori di spessore trascurabile connessi al centro delle armature. A $t = 0$ il circuito viene chiuso e il condensatore inizia a scaricarsi. Determinare, durante la scarica:



a) la legge temporale e il tempo caratteristico della scarica;
b) come dipende dalla distanza r dall'asse la densità di corrente $\mathbf{J}$ nelle armature, supponendo che la carica rimanga uniformemente distribuita;
c) i campi elettrico $\mathbf{E}$ e magnetico $\mathbf{B}$ al primo ordine non nullo nell'approssimazione di correnti variabili (giustificandone la validità anche a posteriori);
d) il vettore di Poynting $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ e il suo flusso lungo la superficie laterale del condensatore, confrontandolo con la variazione dell'energia elettrostatica e l'energia dissipata in R;
e) un vettore di Poynting $\mathbf{S}'$ "alternativo" a $\mathbf{S}$, diretto lungo l'asse del condensatore (suggerimento: si introduca il potenziale φ nell'espressione di $\mathbf{S}$ usando $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ e si elabori l'espressione.)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2, \tag{3}$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad m_e c^2 = 5.1 \times 10^5 \text{ eV}. \tag{4}$$

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \tag{5}$$

Equazione di continuità per la carica elettrica

$$\partial_t \rho + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{6}$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E} = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \tag{7}$$

dove $t_{\text{rit}} = t - r/c$.
Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{8}$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.
Relazione vettoriale (f campo scalare, $\mathbf{V}$ campo vettoriale)

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{V}) = f\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\nabla} f. \tag{9}$$

SOLUZIONI

a) Risolvendo l'equazione del moto con solo **E** si ha per il modulo della velocità

$$v_0 = \frac{eE_0}{m_e\omega} \ . \tag{10}$$

Imponendo $v_0 \ll c$, si ottiene per E_0

$$E_0 \ll \frac{m_e\omega c}{e} = 2\pi\frac{m_e c^2}{e\lambda} \ . \tag{11}$$

Usando $m_e c^2 = 5 \times 10^5$ eV $= 5 \times 10^5 (1.6 \times 10^{-19})$'J otteniamo

$$2\pi\frac{m_e c^2}{e\lambda} = \frac{3.2 \times 10^{12} \text{ V/m}}{(\lambda/1\ \mu\text{m})} \ . \tag{12}$$

Quindi deve essere $E_0 \ll 3.2 \times 10^{11}$ V/m se $\lambda = 10$ μm (laser a CO_2) e $E_0 \ll 3.2 \times 10^{14}$ V/m se $\lambda = 10$ nm (tipica lunghezza ottenibile con un free electron laser).

Usando poi $I = \varepsilon_0 c E_0^2/2$ si ha la condizione sull'intensità

$$I \ll \frac{1.3 \times 10^{22} \text{ W/m}^2}{(\lambda/1\ \mu\text{m})^2} \ . \tag{13}$$

Il record attuale di I per un laser Ti:Sapphire con $\lambda = 0.8$ μm è circa 10^{27} W/m^2.

b) Usando

$$v_y = \text{Re}\left[\frac{-ie}{m_e\omega}E_0 \text{e}^{-i\omega t}\right] = -\frac{e}{m_e\omega}E_0 \sin\omega t \ , \tag{14}$$

e $\mathbf{B} = (E_0/c)\hat{\mathbf{z}}\cos(kx - \omega t)$ si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} \simeq -\hat{\mathbf{x}}\frac{e}{m_e\omega c}E_0^2 \sin\omega t \cos\omega t = -\hat{\mathbf{x}}\frac{e}{2m_e\omega c}E_0^2 \sin 2\omega t \ . \tag{15}$$

c) Il momento di dipolo $\mathbf{d}(t) = -e\mathbf{r}(t)$ ha componenti ortogonali

$$\mathbf{d}(t) = -\hat{\mathbf{y}}\frac{e^2}{m_e\omega^2}E_0 \cos\omega t - \hat{\mathbf{x}}\left(\frac{e^3}{8m_e^2\omega^3 c}\right)E_0^2 \sin 2\omega t \ , \tag{16}$$

che possono essere trattate come dipoli oscillanti indipendenti. Si osserva quindi radiazione diffusa sia alla frequenza ω che alla seconda armonica 2ω. La radiazione ω non si osserva lungo la direzione y, ha il massimo d'emissione nel piano xz ed è linearmente polarizzata lungo $\hat{\mathbf{y}}$. La radiazione 2ω non si osserva lungo la direzione x, ha il massimo d'emissione nel piano yz ed è linearmente polarizzata lungo $\hat{\mathbf{x}}$.

2

a) Dall'equazione

$$\frac{\text{d}Q}{\text{dt}} = -I = -\frac{V}{R} = -\frac{Q/C}{R} \ , \tag{17}$$

dove $C = \varepsilon_0 \pi a/h$ è la capacità del condensatore, si ha la soluzione

$$Q(t) = Q_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} \,, \qquad \tau = RC \,. \tag{18}$$

b) Usando la corrente superficiale $\mathbf{K} = \mathbf{J}\delta$ (con δ spessore delle armature) si ha dall'equazione di continuità (per simmetria $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{r}}$)

$$2\pi r K = \pi r^2 \sigma(t) \,, \tag{19}$$

da cui $K = r\sigma(t)/2$.
c In prima approssimazione il campo $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ è uniforme ed elettrostatico,

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \,. \tag{20}$$

Per simmetria il campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r,t)$ è azimutale. Dall'equazione $c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}$, calcolando la circuitazione di $\mathbf{B}$ su una circonferenza di raggio r con centro sull'asse abbiamo

$$2\pi r B_\phi c^2 = \pi r^2 \partial_t E = -\pi r^2 \frac{E}{\tau} \,, \tag{21}$$

da cui $B_\phi = -(r/2\tau c^2)E$.
d) Si ha

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\varepsilon_0}{2\tau} r E^2 \,, \qquad E^2 = E_0^2 \mathrm{e}^{-2t/\tau} \,, \tag{22}$$

con $E_0 = Q_0/(\pi a^2 \varepsilon_0)$. Si ha per il flusso attraverso la superficie laterale

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi a h S(r=a) = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 E^2}{\tau} \,. \tag{23}$$

Si ha inoltre

$$U_{\mathrm{es}} = \pi a^2 h \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \,, \tag{24}$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{es}}}{\mathrm{dt}} = -\frac{U_{\mathrm{es}}}{2\tau} = -\Phi(\mathbf{S}) \,, \tag{25}$$

La potenza dissipata è $P = RI^2$. Scrivendo $Q = \pi a^2 \varepsilon_0 E$ si ha

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{dt}} = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0 E}{\tau} \,, \tag{26}$$

e

$$RI^2 = R \left(\frac{\pi a^2 \varepsilon_0 E}{\tau} \right)^2 = \frac{1}{C} \frac{(\pi a^2 \varepsilon_0 E)^2}{\tau} \,. \tag{27}$$

Usando infine $C = \varepsilon_0 \pi a^2/h$ si ha

$$P = \frac{\pi a^2 \varepsilon_0 E^2}{\tau} = \Phi(\mathbf{S}) \,. \tag{28}$$

e) Riscrivendo $\mathbf{S}$ per $\varphi = -Ez$ si ha

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 (-\boldsymbol{\nabla}\varphi) \times \mathbf{B} \, . \tag{29}$$

Ora

$$(\boldsymbol{\nabla}\varphi) \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times (\varphi \mathbf{B}) - \varphi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} \, . \tag{30}$$

Dato che il vettore di Poynting è definito a meno di un rotore, si può ridefinire

$$\mathbf{S}' = \varepsilon_0 c^2 \varphi \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \varepsilon_0 c^2 (-Ez) \frac{1}{c^2} \partial_t E = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\varepsilon_0}{2} z \partial_t E^2 \, . \tag{31}$$

Il flusso totale attraverso la superficie del condensatore è

$$\Phi(\mathbf{S}') = \pi a^2 [S'(z + h/2) - S'(z - h/2)] = -\pi a^2 h \frac{\varepsilon_0}{2} z \partial_t E^2 = \Phi(\mathbf{S}) \, . \tag{32}$$