

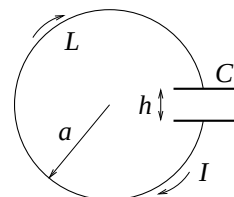
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (20/07/2011)

1

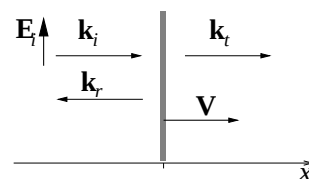
Il circuito in figura è formato da un filo avvolto circolarmente che connette i capi di un condensatore C , formato da due armature piane separate di $h \ll a$, dove $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ è il raggio del circuito. L'induttanza del circuito è L e la resistenza è trascurabile. Nel circuito scorre la corrente oscillante $I(t) = \text{Re}(I_0 e^{-i\omega t})$.



- a) Determinare la frequenza ω .
- b) Calcolare i momenti di dipolo magnetico ed elettrico del circuito.
- c) Calcolare la potenza irradiata dal circuito, discutendo in funzione dei parametri del problema il contributo relativo dei termini di dipolo elettrico e magnetico.

2

Una lamina sottile è caratterizzata da coefficienti noti di trasmissione $t = E_t/E_i$ e riflessione $r = E_r/E_i$ dove E_i , E_r ed E_t sono le ampiezze delle onde incidente, riflessa e trasmessa ad incidenza normale, definite dall'espressione dei campi nel sistema in cui la lamina è ferma (e localizzata a $x = 0$):



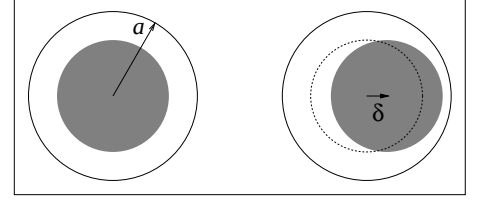
$$E(x, t) = \begin{cases} E_i e^{ikx - i\omega t} + E_r e^{-ikx - i\omega t} = E_i (e^{ikx} + r e^{-ikx}) e^{-i\omega t} & (x < 0), \\ E_t e^{ikx - i\omega t} = t E_i e^{ikx - i\omega t} & (x > 0). \end{cases} \quad (1)$$

Si assuma adesso che la lamina si muova con velocità $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$ costante nel sistema del laboratorio e che su di essa incida un'onda di ampiezza E_0 e frequenza ω_0 . Calcolare

- a) le frequenze delle onde trasmessa ω_t e riflessa ω_r nel laboratorio,
- b) le ampiezze delle onde trasmessa e riflessa nel laboratorio in funzione di r , t , V e ω_0 .
- c) Come cambiano le risposte precedenti se i coefficienti r e t sono funzioni della frequenza [$r = r(\omega)$, $t = t(\omega)$] note e definite *nel sistema in cui la lamina è ferma*?

3

Una sfera metallica di raggio a contiene inizialmente N elettroni ed è elettricamente neutra. Una frazione f degli elettroni ($0 < f < 1$) viene rimossa dalla sfera ed i rimanenti $(1 - f)N$ elettroni si distribuiscono in una configurazione di equilibrio meccanico (necessariamente a simmetria sferica). Gli ioni sono considerati fissi.



- a) Calcolare la densità elettronica ed il raggio della distribuzione degli elettroni.
- b) Se la sfera elettronica viene spostata rigidamente di δ rispetto al centro (con δ abbastanza piccolo affinché la sfera elettronica rimanga interna a quella ionica), calcolare il campo elettrico all'interno della sfera elettronica.
- c) Se la sfera elettronica viene lasciata libera dopo lo spostamento iniziale si osserva che essa oscilla rispetto al centro della sfera ionica. Determinare la frequenza di oscillazione.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Formule di Larmor per la potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ e magnetico $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$

$$P_e = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad P_m = \frac{2k_0}{3c^5} |\ddot{\mathbf{m}}|^2 \quad \left(k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \quad (3)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $(A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_{\parallel} = \gamma(A_{\parallel} - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp} \quad (4)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (5)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Seguendo la convenzione dei segni come in figura le equazioni del circuito sono

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0, \quad I = \frac{dQ}{dt}, \quad (7)$$

da cui

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0, \quad I = I_0 e^{-i\omega t}, \quad \omega = (LC)^{-1/2}. \quad (8)$$

b) Il momento di dipolo magnetico $\mathbf{m}$ può essere calcolato come il momento di una spira di raggio a percorsa dalla corrente I ed è quindi perpendicolare al piano del circuito. Invece, il momento di dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è dovuto alle cariche $\pm Q$ sulle armature del condensatore separate di h , ed è quindi perpendicolare alle armature. Esplicitamente

$$m = \pi a^2 I, \quad p = Qh = iIh/\omega. \quad (9)$$

c) A meno di un fattore comune

$$P_m \sim \frac{|m|^2}{c^2} = \left(\frac{\pi a^2 I_0}{c} \right)^2, \quad P_e \sim |p|^2 = \left(\frac{h I_0}{\omega} \right)^2 \quad (10)$$

da cui il rapporto

$$\frac{P_m}{P_e} = \left(\frac{\pi a^2 \omega}{hc} \right)^2. \quad (11)$$

Il contributo di dipolo magnetico è più importante ($P_m > P_e$) se $\omega > (h/a)(c/a)$, il che non è in contraddizione con la condizione $\omega \ll c/a$ in quanto $h \ll a$.

2

a) Il quadrivettore “fase” dell’onda incidente nel laboratorio S è

$$(\omega_0/c, \mathbf{k}_0) = (\omega_0/c, \hat{\mathbf{x}}\omega_0/c). \quad (12)$$

In S' , la frequenza dell’onda incidente è

$$\omega'_i = \gamma(\omega_0 - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{V}) = \gamma\omega_0(1 - \beta) \equiv \omega'. \quad (13)$$

In S' onda riflessa e trasmessa hanno stessa frequenza ω' ed i rispettivi quadrivettori fase sono

$$(\omega'_r/c, \mathbf{k}'_r) = (\omega'/c, -\hat{\mathbf{x}}\omega'/c) \quad (\omega'_t/c, \mathbf{k}'_t) = (\omega'/c, +\hat{\mathbf{x}}\omega'/c) \quad (14)$$

per cui in S

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + \mathbf{k}'_r \cdot \mathbf{V}) = \gamma(\omega' - \omega'\beta) = \gamma^2(1 - \beta)^2\omega_0 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}\omega_0, \quad (15)$$

$$\omega_t = \gamma(\omega'_t + \mathbf{k}'_t \cdot \mathbf{V}) = \gamma(\omega' + \omega'\beta) = \gamma^2(1 - \beta)(1 + \beta)\omega_0 = \omega. \quad (16)$$

La frequenza dell'onda trasmessa è la stessa dell'onda incidente.

b),c) Si può prendere a piacere l'onda polarizzata lungo $\hat{\mathbf{y}}$, quindi il campo magnetico dell'onda incidente è lungo $\hat{\mathbf{z}}$ e $B_{z,i} = E_i/c$.

Il campo dell'onda incidente in S' è dato da

$$E'_i = E'_{y,i} = \gamma(E_{y,i} - vB_{z,i}) = \gamma(1 - \beta)E_0. \quad (17)$$

Le ampiezze dei campi dell'onda riflessa in S' sono, per definizione di $\mathbf{r}$

$$E'_{y,r} = -\mathbf{r}(\omega')E'_{y,i} \quad B'_{z,r} = +\mathbf{r}(\omega')B'_{z,i} = +\mathbf{r}(\omega')E'_{y,i}/c \quad (18)$$

da cui usando la trasformazione inversa

$$E_{y,r} = \gamma(E'_{y,r} + vB'_{z,r}) = -\gamma(1 - \beta)\mathbf{r}(\omega')E'_{y,i} = -\gamma^2(1 - \beta)^2\mathbf{r}(\omega')E_0 = -\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\mathbf{r}(\omega')E_0. \quad (19)$$

Analogamente per le ampiezze dei campi dell'onda trasmessa in S'

$$E'_{y,t} = +\mathbf{t}(\omega')E'_{y,i}, \quad B'_{z,t} = +\mathbf{t}(\omega')B'_{z,i} = +\mathbf{t}(\omega')E'_{y,i}/c, \quad (20)$$

e quindi

$$E_{y,t} = \gamma(E'_{y,t} + vB'_{z,t}) = \gamma(1 + \beta)\mathbf{t}(\omega')E'_{y,i} = \gamma^2(1 + \beta)^2\mathbf{t}(\omega')E_0 = \mathbf{t}(\omega')E_0. \quad (21)$$

Se si fosse trascurata la variazione del coefficiente di trasmissione con la frequenza l'ampiezza trasmessa non dipenderebbe da β .

3

a) Detto $b < a$ il raggio della sfera elettronica, per il teorema di Gauss il flusso di E su una sfera di raggio r sarà proporzionale alla carica in essa contenuta:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}. \quad (22)$$

L'ipotesi di equilibrio meccanico per gli elettroni implica che $E = 0$ per $r < b$, quindi $Q(r) = 0$ per ogni $r < b$, il che è possibile solo se la densità di carica è nulla:

$$\rho = e(n_i - n_e) = 0, \quad (r < b) \quad (23)$$

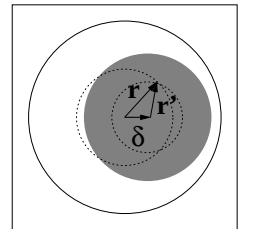
da cui $n_e = n_i$, dove $n_i(4\pi a^3/3) = N$. Dovendo essere $n_e(4\pi b^3/3) = (1 - f)N$, si trova

$$\frac{(1 - f)N}{4\pi b^3/3} = \frac{N}{4\pi a^3/3} \rightarrow b = a(1 - f)^{1/3}. \quad (24)$$

b)

Nella configurazione in cui la sfera elettronica di densità n_i è spostata rispetto al centro di δ , il campo elettrostatico $\mathbf{E}_s$ all'interno di essa può essere ricavato dal principio di sovrapposizione, sommando il campo dovuto agli ioni con quello dovuto agli elettroni:

$$\mathbf{E}_s = \frac{en_i}{3\varepsilon_0}\mathbf{r} - \frac{en_i}{3\varepsilon_0}\mathbf{r}' = \frac{en_i}{3\varepsilon_0}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{en_i}{3\varepsilon_0}\delta, \quad (25)$$



ed è quindi uniforme e parallelo a $\boldsymbol{\delta}$.

c) Tutti gli elettroni nella sfera sono sottoposti alla forza

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E}_s = -\frac{e^2 n_i}{3\varepsilon_0} \boldsymbol{\delta}, \quad (26)$$

che risulta quindi proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio. Dall'equazione del moto

$$m_e \frac{d^2 \boldsymbol{\delta}}{dt^2} = \mathbf{F} = -\frac{e^2 n_i}{3\varepsilon_0} \boldsymbol{\delta} \equiv -m_e \omega_M^2 \boldsymbol{\delta}, \quad (27)$$

si ricava la frequenza di oscillazione

$$\omega_M = \sqrt{\frac{e^2 n_i}{3\varepsilon_0 m_e}}. \quad (28)$$