

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2011-2012

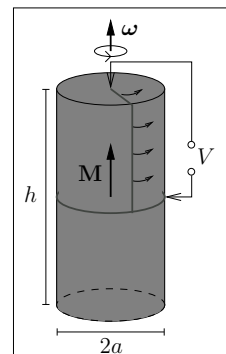
Compito di Fisica 2 (16/07/2012)

1

Si consideri un lungo cilindro di altezza h e raggio $a \ll h$, permanentemente magnetizzato, con densità di magnetizzazione $\mathbf{M}$ parallela all'asse.

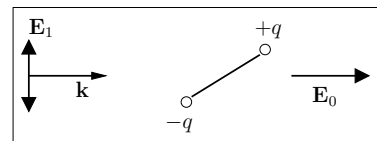
a) Dimostrare che il campo magnetico all'interno del cilindro (lontano dalle basi) è dato da $\mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{M}$, e che in corrispondenza delle basi la componente perpendicolare ha modulo $B_{\perp} \simeq \mu_0 M/2$.

b) Si costruisce un circuito con contatti striscianti che connettono il centro di una base con una fascia circolare a metà del cilindro, come in figura. Si mantiene il cilindro in rotazione attorno all'asse con velocità angolare ω . Che forza elettromotrice V si misura nel circuito?



2

Schematizziamo una molecola biatomica dipolare come una coppia di masse m uguali, rispettivamente con carica q e $-q$, situate a distanza d l'una dall'altra. Si ponga inizialmente la molecola in un campo elettrostatico $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}$ costante nel tempo e spazialmente uniforme.



a) Si determinino le equazioni del moto della molecola, nell'ipotesi che essa sia un corpo rigido, ovvero che d , distanza tra le cariche, e di conseguenza il modulo del momento di dipolo della molecola non vengano modificati dalla presenza del campo $\mathbf{E}_0$.

Si supponga ora che a $t = 0$ la molecola, inizialmente orientata lungo il campo $\mathbf{E}_0$, sia investita da un'onda elettromagnetica di frequenza ω che si propaga lungo $\hat{\mathbf{x}}$ ed è polarizzata linearmente in direzione $\hat{\mathbf{y}}$, con E_1 ampiezza del campo elettrico. Si trascurino gli effetti magnetici dell'onda.

b) Nell'ipotesi che d sia trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda λ del campo elettrico dell'onda, si determinino le equazioni del moto della molecola.

c) In regime di piccole oscillazioni, si determini la legge temporale dell'orientamento del momento di dipolo della molecola in presenza sia del campo statico sia dell'onda incidente e si specifichino le relative condizioni di validità di tale regime su E_1 e ω .

d) Nell'approssimazione individuata al punto c), si calcolino la potenza irradiata dalla molecola, la sua distribuzione angolare e la sezione d'urto di diffusione.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (2)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} e^{-i\omega t_{\text{rit}}} \quad (3)$$

Formula di Larmor per la potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (4)$$

Energia di interazione tra un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ e un campo elettrico $\mathbf{E}$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

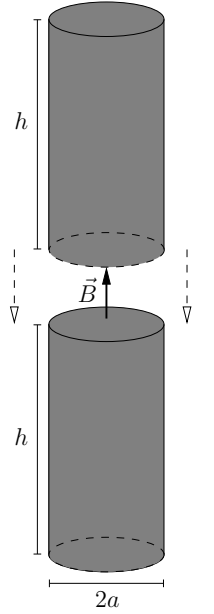
a) Sotto le condizioni ipotizzate il campo magnetico generato dal nostro cilindro magnetizzato può essere considerato generato da una densità superficiale di corrente che scorre sulla superficie laterale del cilindro stesso, pari a $\sigma_{\text{mag}} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie. A sua volta, questa configurazione è equivalente ad un solenoide delle stesse dimensioni del cilindro, in cui il prodotto nI , con n numero di spire per unità di lunghezza e I corrente della singola spira, è dato da $nI = \sigma_{\text{mag}}$. Lontano dalle basi abbiamo quindi un campo $\mathbf{B}$ uniforme dato da

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 M. \quad (6)$$

Allo stesso risultato si può giungere ponendo il campo ausiliare $\mathbf{H}$ uguale a zero fuori dal solenoide, e ricordando che la componente tangenziale di $\mathbf{H}$ è continua attraverso la superficie laterale del cilindro. All'interno abbiamo così

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{M}. \quad (7)$$

Per il campo su una base si può fare la considerazione seguente: se prolunghiamo il cilindro magnetizzato con un secondo cilindro magnetizzato coassiale identico, come in figura, il campo sulla base superiore del cilindro originale (coincidente con la base inferiore del cilindro aggiunto) vale ancora $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$, ma è generato dalla magnetizzazione di entrambi i cilindri. Per motivi di simmetria, ambedue i cilindri portano al campo un contributo assiale e, fuori dall'asse, anche un contributo radiale (in coordinate cilindriche). I due contributi radiali sono opposti e si cancellano, mentre i contributi assiali sono uguali e si sommano. Se togliamo il secondo cilindro, scompaiono i suoi contributi al campo sulla base. Rimane quindi solo quanto generato dal cilindro originario, cioè un campo perpendicolare alla base (parallelo all'asse del cilindro)



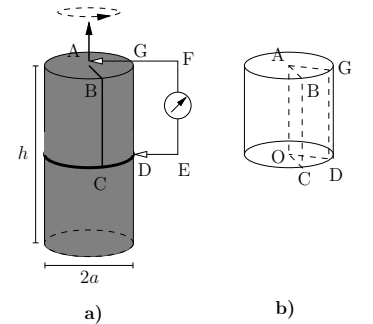
$$B_{\perp} = \frac{1}{2} \mu_0 M, \quad (8)$$

e, fuori dall'asse, compare una componente radiale, non più compensata dal contributo del secondo cilindro.

b) Dobbiamo applicare la legge di Faraday-Neumann al circuito ABCDEFGA della parte a) della figura a fianco.

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_{\text{ABCDEFGA}}(B)}{dt}. \quad (9)$$

Il flusso di $\mathbf{B}$ va così calcolato attraverso una qualunque superficie che abbia la linea ABCDEFGA come contorno, per esempio quella costituita dalle parti BAG, sulla base superiore del cilindro, BCDG sulla superficie laterale del cilindro, ed infine DEFG fuori dal cilindro, giacente su di un piano contenente l'asse del cilindro stesso. Data la rotazione del cilindro, con un'opportuna scelta dell'origine dei tempi possiamo porre



$$\text{BAG} = \frac{1}{2} a^2 \omega t, \quad \text{BCDG} = \frac{1}{2} h a \omega t. \quad (10)$$

Per simmetria, la superficie DEFG non è attraversata da flusso, quindi rimangono i flussi attraverso le superfici BCDG e BAG, riportate anche nella parte b) della figura, che rappresenta solo la metà superiore del cilindro. Qui le superfici BAG e BCDG, unite alle superfici AOCB, AODG e COD formano una superficie chiusa, attraverso la quale il flusso di $\mathbf{B}$ è quindi nullo:

$$\Phi_{\text{BAG}} + \Phi_{\text{BCDG}} + \Phi_{\text{AOCB}} + \Phi_{\text{AODG}} + \Phi_{\text{COD}} = 0. \quad (11)$$

Per motivi di simmetria sono rigorosamente nulli Φ_{AOCB} e Φ_{AODG} , quindi rimane

$$\Phi_{\text{BAG}} + \Phi_{\text{BCDG}} + \Phi_{\text{COD}} = 0. \quad (12)$$

D'altra parte il flusso (entrante) attraverso la superficie COD è data dal prodotto del campo interno $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$ per la superficie COD, uguale alla superficie BAG

$$\Phi_{\text{COD}} = -\frac{1}{2}Ba^2\omega t = -\frac{1}{2}\mu_0 Ma^2\omega t. \quad (13)$$

Abbiamo quindi

$$\Phi_{\text{BAG}} + \Phi_{\text{BCDG}} = -\Phi_{\text{COD}} = \frac{1}{2}\mu_0 Ma^2\omega t, \quad (14)$$

da cui segue

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{ABCDEFGA}}(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_{\text{BAG}} + \Phi_{\text{BCDG}}) = -\frac{1}{2}\mu_0 Ma^2\omega. \quad (15)$$

In altre parole, se il cilindro proseguisse all'infinito, il flusso entrante attraverso la superficie COD sarebbe pari al flusso uscente attraverso BAG, e il flusso attraverso BCDG sarebbe nullo. Nel nostro caso, metà del flusso che entra attraverso COG esce attraverso BAG, l'altra metà attraverso BCDG.

Alternativamente si può calcolare la forza elettromotrice come integrale di linea della forza di Lorentz (per unità di carica) tra i punti di contatto A e D. Calcolando sul percorso AOD si ha

$$\mathcal{E} = \int_{\text{AOD}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{OD}} v_\phi(r) B_z dr = -\omega B_0 \int_0^a r dr = -\frac{1}{2}\mu_0 Ma^2\omega, \quad (16)$$

essendo il contributo del tratto AO nullo dato che $\mathbf{v} = 0$ per $r = 0$.

Può essere interessante ottenere lo stesso risultato usando il percorso AGD. L'integrale sul tratto AG si calcola esattamente come il precedente, ma il campo $B_z = B_0/2$, quindi

$$\mathcal{E} = \omega \frac{B_0}{2} \int_0^a r dr + \int_{\text{GD}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{4}\mu_0 Ma^2\omega + v_\phi(a) \int_0^{h/2} B_r(r=a, z) dz. \quad (17)$$

L'integrale sul tratto GD si può calcolare osservando l'espressione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie cilindrica chiusa S delimitata dalla faccia superiore, dalla sezione mediana e dalla superficie laterale del cilindro. Il contributo al flusso delle basi è $(-B_0 + B_0/2)\pi a^2 = -\pi a^2 \mu_0 M/2$, quindi

$$0 = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\pi a^2 \mu_0 M/2 + \int_0^{h/2} B_r(r=a, z) 2\pi a dz, \quad (18)$$

da cui ricaviamo

$$\int_0^{h/2} B_r(r=a, z) dz = -a\mu_0 M/4, \quad (19)$$

ed essendo $v_\phi(a) = \omega a$ otteniamo infine

$$\int_{\text{AGD}} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{4}\mu_0 Ma^2\omega - \frac{1}{4}\mu_0 Ma^2\omega = -\frac{1}{2}\mu_0 Ma^2\omega, \quad (20)$$

in accordo coi calcoli precedenti.

2

a) Poiché il campo esterno è uniforme e la molecola è un corpo rigido, sulle due cariche agiscono forze uguali e opposte: il centro di massa del sistema (collocato nel centro geometrico del dipolo elettrico $p_0 = qd$) si muove con velocità costante, che per semplicità possiamo considerare uguale a zero. Resta da considerare il moto di rotazione del sistema attorno al centro di massa. Se indichiamo con θ l'angolo fra la direzione istantanea del dipolo $\mathbf{p}_0$ e il campo esterno $\mathbf{E}_0$, il dipolo ruota nel piano xy individuato da $\mathbf{E}_0$ e dalla posizione iniziale del dipolo stesso, secondo l'equazione del momento della coppia di forze

$$I\ddot{\theta} = -2qE_0\frac{d}{2}\sin\theta = -E_0p_0\sin\theta \quad (21)$$

dove $I = 2m(d/2)^2 = md^2/2$ è il momento d'inerzia della molecola calcolato rispetto all'asse $\hat{\mathbf{z}}$. La precedente è l'equazione delle oscillazioni di un pendolo semplice. La frequenza delle piccole oscillazioni ($\theta \simeq 0$ che implica $\sin\theta \simeq \theta$) è:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E_0p_0}{I}} = \sqrt{\frac{2qE_0}{md}}. \quad (22)$$

b) In approssimazione di campi deboli trascuriamo gli effetti magnetici dell'onda. Nell'ipotesi $d \ll \lambda$, il campo dell'onda incidente

$$\mathbf{E}_1 = E_1\hat{\mathbf{y}}e^{i(kx-\omega t)} \quad (23)$$

può essere considerato spazialmente uniforme, esattamente come $\mathbf{E}_0$ (per semplicità scegliamo le fasi in modo che E_1 sia reale). In tale approssimazione la forza netta sulla molecola è ancora nulla e quindi il centro di massa rimane fermo. Come $\mathbf{E}_0$, anche $\mathbf{E}_1$ esercita una coppia di forze con momento perpendicolare al piano xy e pari a

$$+2qE_1e^{-i\omega t}\frac{d}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = p_0E_1e^{-i\omega t}\cos\theta. \quad (24)$$

L'equazione del moto è allora

$$I\ddot{\theta} = -E_0p_0\sin\theta + p_0E_1e^{-i\omega t}\cos\theta \quad (25)$$

ovvero, ponendo $\omega_1^2 = p_0E_1/I$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\sin\theta + \omega_1^2e^{-i\omega t}\cos\theta. \quad (26)$$

c) In regime di piccole oscillazioni, $\sin\theta \simeq \theta$ e $\cos\theta \simeq 1$. Perciò dalla (26) ricaviamo che l'orientamento del momento di dipolo della molecola soddisfa l'equazione di un oscillatore armonico forzato

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + \omega_1^2e^{-i\omega t}. \quad (27)$$

In presenza di un termine di smorzamento piccolo ma non trascurabile, la soluzione omogenea decade dopo un opportuno transiente. La soluzione particolare assume la forma $\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t$, con

$$\theta_0 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (28)$$

e presenta una risonanza in ω_0 . La soluzione è valida se

$$\cos \theta_0 \simeq 1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{p_0 E_1}{I} \ll \frac{p_0 E_0}{I} - \omega^2, \quad (29)$$

condizione che coinvolge E_1 e ω .

d) Sempre in regime di piccole oscillazioni, il momento di dipolo elettrico della molecola ha le seguenti due componenti

$$p_x(t) = p_0 \cos \theta(t) \simeq p_0, \quad p_y(t) = p_0 \sin \theta(t) \simeq p_0 \theta_0 \cos \omega t. \quad (30)$$

La componente lungo $\hat{\mathbf{x}}$ è quindi costante, mentre la componente lungo $\hat{\mathbf{y}}$ oscilla con ampiezza $p_0 \theta_0$ e frequenza ω : abbiamo quindi un dipolo oscillante nella direzione della polarizzazione dell'onda.

La distribuzione angolare della potenza irradiata in media su un periodo è quella tipica di un dipolo oscillante, ossia

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{1}{8\pi} k_0 \frac{\omega^4}{c^3} p_0^2 \theta_0^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \quad (31)$$

dove θ è la colatitudine rispetto a $\hat{\mathbf{x}}$ e $k_0 = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$. La potenza irradiata è nulla lungo l'asse $\hat{\mathbf{y}}$ e massima nel piano ad esso perpendicolare.

La potenza totale irradiata in media su un periodo si ottiene integrando la precedente sull'intero angolo solido

$$\langle P_{\text{tot}} \rangle = \frac{1}{3} k_0 \frac{\omega^4}{c^3} p_0^2 \theta_0^2. \quad (32)$$

Infine la sezione d'urto σ è data dal rapporto fra la potenza irradiata e l'intensità dell'onda incidente, che per un'onda di ampiezza E_1 reale e polarizzata linearmente è data da $\mathcal{I} = \epsilon_0 c E_1^2 / 2$. Perciò abbiamo

$$\sigma = \frac{\langle P_{\text{tot}} \rangle}{\mathcal{I}} = \frac{8\pi}{3} k_0^2 \frac{q^4 d^4}{c^4 I^2} \frac{\omega^4}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2} \quad (33)$$

$$= \frac{32\pi}{3} k_0^2 \frac{q^4}{m^2 c^4} \frac{\omega^4}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2} \quad (34)$$

ossia la sezione d'urto è pari, a parte un fattore numerico, al prodotto di una sezione geometrica $r_0^2 = [k_0 q^2 / (mc^2)]^2$ (in cui si riconosce un'espressione analoga al raggio classico dell'elettrone, ottenuta sostituendo m e q rispettivamente a massa e carica dell'elettrone) per un fattore di frequenza.