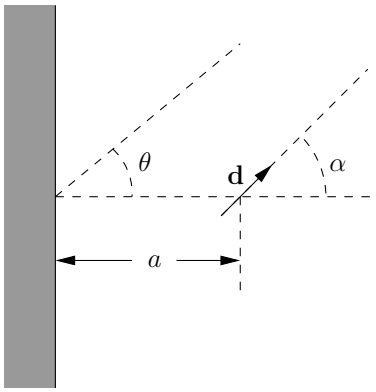
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2012-2013

Compito di Fisica 2 (15/07/2013)

1

a) Con riferimento alla figura, $\mathbf{d}$ è un dipolo elettrico ($\mathbf{d} = \mathbf{p}$) che si trova a distanza a da un piano conduttore infinito e forma un angolo α con la normale al piano. Si dia la soluzione del problema del potenziale elettrostatico col metodo delle immagini e si determini il verso della forza sul dipolo.
b) Si assuma adesso che $\mathbf{d}$ sia un dipolo magnetico ($\mathbf{d} = \mathbf{m}$) e che il piano sia composto da materiale con permeabilità magnetica μ. Si descriva la soluzione per il campo magnetico in tutto lo spazio e si determini il verso della forza sul dipolo nei due casi limite di diamagnete perfetto ($\mu = 0$) e paramagnete perfetto ($\mu = \infty$).
c) Tornando al caso **a)**, si assuma che il dipolo abbia una dipendenza oscillante dal tempo, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t}$. Assumendo $2a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ si calcoli la potenza della radiazione emessa a grande distanza ($r \gg a$) e la sua distribuzione angolare in funzione dell'angolo θ.
d) (*facoltativo*) Si risponda di nuovo alla domanda **c)** nel caso in cui la condizione $2a \ll \lambda$ *non* è verificata, considerando in particolare i casi $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi/2$.



2

a) Dimostrare che una sfera conduttrice posta in un campo elettrico esterno costante e uniforme $\mathbf{E}_{\text{ext}}$ acquista un momento di dipolo $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_{\text{ext}}$ dove a è il raggio della sfera.
b) Un'onda elettromagnetica piana e monocromatica, polarizzata linearmente con ampiezza del campo elettrico E_0 e avente lunghezza d'onda $\lambda \gg a$ incide sulla sfera conduttrice. Assumendo una conducibilità infinita si calcoli la potenza P_r diffusa dalla sferetta in approssimazione di radiazione di dipolo elettrico, giustificando eventualmente le approssimazioni fatte, e si confronti la sezione d'urto $S_r = P_r/I$, dove I è l'intensità dell'onda, con la sezione geometrica πa^2.
c) Assumendo che la sfera sia anche perfettamente diamagnetica, si calcoli il contributo alla potenza irraggiata del termine di dipolo magnetico confrontandolo col contributo di dipolo elettrico.
d) Si risponda di nuovo al punto **b)** nel caso in cui la sfera non sia perfettamente conduttrice ma sia composta di un materiale Ohmico con conducibilità σ ($\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$). Si calcoli la potenza dissipata nella sfera P_d confrontandola con P_r.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\ . \tag{1}$$

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})\equiv\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0. \tag{2}$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0\ ,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}\right)\equiv\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=0\ ,\qquad \mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})\ ,\qquad \mathbf{J}_M=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{M}\ . \tag{3}$$

Campo elettrico (magnetico) interno a una sfera con polarizzazione elettrica (magnetica) uniforme $\mathbf{P}$ ($\mathbf{M}$):

$$\mathbf{E}_{\rm int}=-\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\ ,\qquad \mathbf{B}_{\rm int}=\frac{2\mu_0}{3}\,\mathbf{M}\ . \tag{4}$$

Campo generato da un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ statico:

$$\mathbf{E}_p=\frac{k_0}{r^3}[3(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}-\mathbf{p}]\ . \tag{5}$$

Energia potenziale di un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ in presenza di un campo elettrostatico $\mathbf{E}$:

$$U=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}\ . \tag{6}$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2\ ,\qquad \frac{dP_{\rm irr}}{d\Omega}=\frac{3P_{\rm irr}}{4\pi}\sin^2\theta\ , \tag{7}$$

dove θ è l'angolo tra $\mathbf{p}$ e la direzione di osservazione $\hat{\mathbf{r}}=\mathbf{r}/r$.
Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo magnetico $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^5}|\ddot{\mathbf{m}}|^2\ . \tag{8}$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right)+\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S}=0\ , \tag{9}$$

dove $\mathbf{S}=\varepsilon_0c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B}$.

SOLUZIONI

1

a) Considerando il dipolo come limite per $h \to 0$ di una configurazione di due cariche di valore $\pm p/h$ a distanza h tra loro vediamo che il problema si risolve ponendo un dipolo immagine $\mathbf{p}'$ uguale in modulo a $\mathbf{p}$ e disposto come in figura. La forza che agisce su un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ posto in un campo elettrico $\mathbf{E}$ vale

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})_{\alpha \text{ costante}} , \tag{10}$$

mentre il campo generato da $\mathbf{p}'$ su $\mathbf{p}$ vale

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(3\,\frac{\mathbf{p}'\cdot\hat{\mathbf{x}}}{(2a)^3}\right)\hat{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{p}'}{(2a)^3}\right] \tag{11}$$

da cui

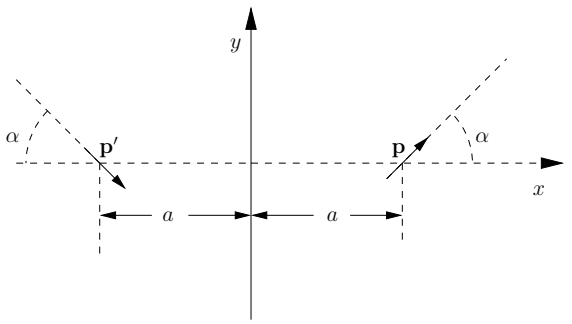


Figura 1: Dipolo elettrico a distanza a da un piano conduttore posto in $x = 0$.

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial(2x)}\left[\left(3\,\frac{(\mathbf{p}'\cdot\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{x}})}{(2x)^3}\right) - \frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}}{(2x)^3}\right]_{x=a} \\ &= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(3\,\frac{p^2\cos^2\alpha}{8x^3}\right) - \frac{p^2\cos(2\alpha)}{8x^3}\right]_{x=a} \\ &= -\frac{3p^2}{64\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\cos^2\alpha - \cos(2\alpha)}{a^4}\right] \end{aligned} \tag{12}$$

che è negativa, cioè attrattiva.

b) Nel caso di un dipolo magnetico $\mathbf{m}$ in presenza di un semispazio superconduttore ($\mu = 0$) per $x < 0$ la continuità della componente di $\mathbf{B}$ perpendicolare alla superficie di separazione tra due mezzi impone che $\mathbf{B}$ sia parallelo al piano $x = 0$. Per questo il dipolo immagine $\mathbf{m}'$ dovrà essere disposto come in figura. Il campo magnetico generato da $\mathbf{m}'$ su $\mathbf{m}$ vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\left(3\,\frac{\mathbf{m}'\cdot\hat{\mathbf{x}}}{(2a)^3}\right)\hat{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{m}'}{(2a)^3}\right] , \tag{13}$$

mentre la forza esercitata su $\mathbf{m}$ in presenza di un campo magnetico $\mathbf{B}$ vale

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})_{\alpha \text{ costante}} , \tag{14}$$

da cui otteniamo

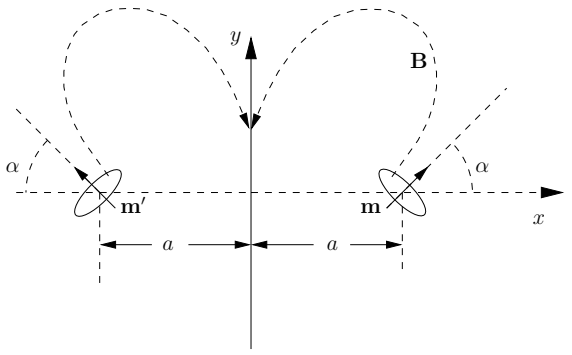


Figura 2: Dipolo magnetico a distanza a da un piano superconduttore

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial(2x)}\left[\left(3\,\frac{(\mathbf{m}'\cdot\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{x}})}{(2x)^3}\right) - \frac{\mathbf{m}'\cdot\mathbf{m}}{(2x)^3}\right]_{x=a} \\ &= \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(3\,\frac{-m^2\cos^2\alpha}{8x^3}\right) + \frac{m^2\cos(2\alpha)}{8x^3}\right]_{x=a} \\ &= \frac{3\mu_0 m^2}{64\pi}\left[\frac{3\cos^2\alpha - \cos(2\alpha)}{a^4}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

che è positiva, cioè il dipolo magnetico viene respinto
dallo spazio superconduttore.

Nel caso invece che il semispazio $x < 0$ sia perfettamente paramagnetico ($\mu_r \to \infty$) si può assumere $\mathbf{H} \simeq 0$ all'interno in modo che $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ abbia un valore finito. La continuità della componente di $\mathbf{H}$ parallela alla superficie di polarizzazione tra due mezzi impone allora che $\mathbf{H}_{\parallel} = 0$ alla superficie $x = 0$. La situazione è allora formalmente identica a quella del punto **a)**, in virtù dell'analogia $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$. La forza si ottiene quindi sostituendo ovunque nelle formule $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ con $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}'$, e ε_0 con $1/\mu_0$, ed è attrattiva.

c) Nel semispazio $x > 0$ vediamo i due dipoli elettrici di Fig. 1 che oscillano a frequenza ω. Poiché la distanza fra dipolo reale e immagine è molto minore della lunghezza d'onda ha senso considerare il momento di dipolo totale del sistema $\mathbf{p}_t = \mathbf{p} + \mathbf{p}' = 2p\hat{\mathbf{x}}\cos\alpha$. La radiazione è quindi distribuita come $\sin^2\theta$ e la potenza totale vale $P = (2k_0/3c^3)4p^2\omega^2\cos^2\alpha$.
d) In questo caso dobbiamo considerare l'interferenza tra dipolo reale e immagine. Lungo la direzione θ lo sfasamento relativo tra i dipoli è $\phi = 2ka\cos\theta$ con $k = \omega/c$ e la potenza emessa per unità di angolo solido in direzione θ, omettendo fattori costanti, è

$$dP/d\Omega \propto |\mathrm{e}^{-i\phi/2}\sin(\theta+\alpha) + \mathrm{e}^{+i\phi/2}\sin(\theta-\alpha)|^2 \ . \tag{16}$$

Osservando che

$$|\mathrm{e}^{-i\phi/2} \pm \mathrm{e}^{+i\phi/2}|^2 = 2(1 \pm \cos\phi) = 2[1 \pm \cos(2ka\cos\theta)] \ , \tag{17}$$

nel caso $\alpha = 0$ si può fattorizzare $\sin(\theta \pm \alpha) \to \sin\theta$ e quindi

$$dP/d\Omega \propto 2[1 \pm \cos(2ka\cos\theta)]\sin^2\theta \ , \tag{18}$$

mentre nel caso $\alpha = \pi/2$ si può fattorizzare $\sin(\theta \pm \alpha) \to \mp\cos\theta$ e quindi

$$dP/d\Omega \propto 2[1 \pm \cos(2ka\cos\theta)]\cos^2\theta \ . \tag{19}$$

In entrambi i casi abbiamo frange di interferenza dipendenti dall'angolo di osservazione.

2

a) Le cariche di superficie sulla sfera sono equivalenti ad una polarizzazione uniforme $\mathbf{P}$ che genera all'interno della sfera il campo $\mathbf{E}_{\rm pol} = -\mathbf{P}/3\varepsilon_0$. Poichè il campo totale all'interno $\mathbf{E}_{\rm int} = \mathbf{E}_{\rm ext} + \mathbf{E}_{\rm pol} = 0$ si ottiene $\mathbf{P} = 3\varepsilon_0\mathbf{E}_{\rm ext}$, da cui un momento di dipolo $\mathbf{p} = (4\pi a^3/3)\mathbf{P} = 4\pi\varepsilon_0 a^3\mathbf{E}_{\rm ext}$.
b) Poiché $\lambda \gg a$ il campo dell'onda può essere preso come uniforme sul volume della sfera e le condizioni alla superficie sono le stesse del problema elettrostatico. Quindi la sfera assume un momento di dipolo $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3\mathbf{E}_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$. La potenza irraggiata in media sul periodo vale

$$P_r^{(p)} = \frac{k_0}{3c^3}(4\pi\varepsilon_0 a^3)^2\omega^4|\mathbf{E}_0|^2 \ . \tag{20}$$

L'intensità dell'onda vale $I = \varepsilon_0 c|\mathbf{E}_0|^2/2$, per cui

$$S_r = \frac{8}{3}\left(\frac{\omega a}{c}\right)^4 \pi a^2 = \frac{128\pi^4}{3}\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 \pi a^2 \ . \tag{21}$$

c) Si procede in analogia col caso **b)**: una sfera con magnetizzazione permanente $\mathbf{M}$ produce al suo interno un campo magnetico $\mathbf{B}_{\rm pol} = 2\mu_0\mathbf{M}/3$, per cui il momento magnetico è

$$\mathbf{m} = (4\pi a^3/3)\mathbf{M} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0}\mathbf{B}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t} = -2\pi\varepsilon_0 a^3 c E_0 \hat{\mathbf{B}}_0 \mathrm{e}^{-i\omega t} \ , \tag{22}$$

e la potenza irraggiata è

$$P_r^{(m)} = \frac{k_0}{3c^5}(2\pi\varepsilon_0 a^3 c)^2 \omega^4 |\mathbf{E}_0|^2 = \frac{1}{4}P_r^{(p)} \ . \tag{23}$$

d) La sfera con conducibilità reale σ è equivalente a una sfera con permittività dielettrica complessa $\varepsilon_r = 1 + i\sigma/(\varepsilon_0\omega)$. Il campo interno è dato quindi da

$$\mathbf{E}_{\rm int} = \frac{3\mathbf{E}_0}{2+\varepsilon_r} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + i\sigma/(3\varepsilon_0\omega)} \ . \tag{24}$$

La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P_d = \int_{\rm sfera} \mathbf{J}\cdot\mathbf{E} dV = \frac{1}{2}\sigma |\mathbf{E}_{\rm int}|^2 \left(\frac{4\pi a^3}{3}\right) \ , \tag{25}$$

e si ha (considerando solo il termine di dipolo elettrico per semplicità)

$$\frac{P_r}{P_d} = \frac{2\varepsilon_0\omega}{\sigma}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^3 \left[1 + \left(\frac{\sigma}{3\varepsilon_0\omega}\right)^2\right] \ . \tag{26}$$