

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2013-2014

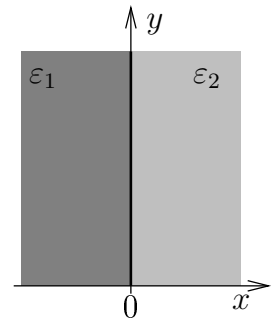
Compito di Fisica 2 (17/07/2014)

1

Sulla superficie piana $x = 0$ di separazione tra due mezzi dielettrici, aventi permittività rispettivamente ε_1 (per $x < 0$) e ε_2 (per $x > 0$) si trova la densità superficiale di carica libera σ .

Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio nei due casi

- a) di densità uniforme $\sigma = \sigma_0$,
- b) di densità non uniforme $\sigma = \sigma_0 \cos(ky)$. (Suggerimento: si cerchi per il potenziale elettrostatico ϕ una soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 \phi = 0$ nella forma $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ nelle due regioni $x > 0$ e $x < 0$, e si impongano poi le condizioni al bordo per $x = 0$).



2

Si consideri un'onda monocromatica piana *stazionaria* di polarizzazione generica, il cui campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \cos(kx) (\hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t) + \delta \hat{\mathbf{z}} \sin(\omega t)) = \text{Re} \left(\frac{E_0}{(1 + \delta^2)^{1/2}} (\hat{\mathbf{y}} + i\delta \hat{\mathbf{z}}) \cos(kx) e^{-i\omega t} \right), \quad (1)$$

dove $0 < \delta < 1$ (i casi $\delta = 0$ e $\delta = 1$ corrispondono a polarizzazione lineare e circolare, rispettivamente).

- a) Scrivere l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}$ corrispondente al campo elettrico (1) e determinare per quali valori di δ i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono mutuamente perpendicolari o paralleli. Cosa si può dire del flusso di energia elettromagnetica, sia istantaneo che mediato sul periodo?
- b) Si risolva l'equazione del moto (a regime) per una particella di carica q e massa m considerando l'effetto del solo campo elettrico (1). Si dica come variano con x l'ampiezza di oscillazione e la potenza irradiata dalla particella.
- c) Si valuti ora la forza lungo x mediata sul periodo di oscillazione

$$F_x = \langle q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle_x, \quad (2)$$

usando per la velocità $\mathbf{v}$ della particella il risultato del punto precedente. Si discuta il moto lungo x sotto l'effetto di F_x , individuando in particolare eventuali punti di equilibrio e la frequenza delle piccole oscillazioni intorno ad essi.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4)$$

Equazioni dell'elettrostatica per mezzi con permittività dielettrica ε :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{D} \equiv (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \varepsilon \mathbf{E} . \quad (5)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (6)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (7)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) L'equazione $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}$, con $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, non contiene esplicitamente ε e suggerisce quindi di cercare una soluzione antisimmetrica per $\mathbf{D}$ (analoga alla soluzione per $\mathbf{E}$ attorno ad un piano carico nel vuoto): dalla simmetria del problema e dal teorema di Gauss si ottiene immediatamente $\mathbf{D} = (\sigma_0/2)\text{sign}(x)\hat{\mathbf{x}}$, da cui $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = -(\sigma_0/2\varepsilon_1)\hat{\mathbf{x}}$ per $x < 0$ e $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 = +(\sigma_0/2\varepsilon_2)\hat{\mathbf{x}}$ per $x > 0$.

b) Separando le variabili l'equazione di Laplace ha soluzioni del tipo

$$\phi(x, y) = (Ce^{+\alpha x} + De^{-\alpha x}) (A \cos(\alpha y) + B \sin(\alpha y)) , \quad (9)$$

con $\alpha > 0$ da determinare. La simmetria del problema, la continuità di ϕ e il vincolo che ϕ ed $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ non divergano per $x \rightarrow \pm\infty$ suggeriscono di prendere la soluzione con $\alpha = k$ e

$$\phi = \phi_0 \exp(-k|x|) \cos(ky) . \quad (10)$$

Le condizioni al bordo per il campo elettrico a $x = 0$ sono

$$\varepsilon_2 E_x(0^+, y) - \varepsilon_1 E_x(0^-, y) = \sigma(y) , \quad E_y(0^+, y) - E_y(0^-, y) = 0 , \quad (11)$$

che sono soddisfatte se

$$\phi_0 = \frac{\sigma_0}{k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} . \quad (12)$$

2

a) Scriviamo i campi in forma complessa come $\mathbf{E} = \text{Re}(\tilde{\mathbf{E}}e^{-i\omega t})$, etc. Utilizzando l'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ otteniamo

$$-i\omega \tilde{\mathbf{B}} = -k \frac{E_0}{(1 + \delta^2)^{1/2}} (-\hat{\mathbf{z}} + i\delta \hat{\mathbf{y}}) \sin(kx) , \quad (13)$$

da cui

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{E_0}{c(1 + \delta^2)^{1/2}} (\delta \hat{\mathbf{y}} + i\hat{\mathbf{z}}) \sin(kx) . \quad (14)$$

Si ha quindi

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{c(1 + \delta^2)^{1/2}} (\hat{\mathbf{y}}\delta \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{z}} \sin(\omega t)) \sin(kx) . \quad (15)$$

Per i prodotti scalare e vettoriale, a meno di fattori moltiplicativi

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \propto \delta \cos^2(\omega t) + \delta \sin^2(\omega t) = \delta , \quad (16)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} \propto \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \delta^2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(1 - \delta^2) \sin(\omega t) \cos(\omega t) , \quad (17)$$

da cui $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ se $\delta = 0$ e $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0$ se $\delta = 1$: i campi sono perpendicolari per polarizzazione lineare e paralleli per polarizzazione circolare.

Il flusso di energia $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ è identicamente nullo a ogni istante per $\delta = 1$, mentre si annulla in media sul periodo per $\delta \neq 1$.

b) L'equazione $d\mathbf{v}/dt = q\mathbf{E}/m$ ha soluzione $\tilde{\mathbf{v}} = (iq/m\omega)\tilde{\mathbf{E}}$. L'ampiezza di oscillazione varia quindi come $\cos(kx)$. La potenza irradiata $P \propto |d\mathbf{v}/dt|^2 \propto \cos^2(kx)$. Ampiezza e potenza irradiata sono nulle nei punti tali che $kx = \pi/2 + n\pi$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

c) Si ha

$$\begin{aligned}\langle q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle &= \frac{1}{2}\text{Re} \left(\frac{iq^2}{m\omega} \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}}^* \right) \\ &= \frac{q^2}{2mc\omega} \frac{E_0^2}{1 + \delta^2} \sin(kx) \cos(kx) \text{Re} (i(\hat{\mathbf{y}} + i\delta\hat{\mathbf{z}}) \times (\delta\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{z}})) = \hat{\mathbf{x}} \frac{q^2}{4mc\omega} E_0^2 \sin(2kx) \quad (18)\end{aligned}$$

essendo $(\hat{\mathbf{y}} + i\delta\hat{\mathbf{z}}) \times (\delta\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{z}}) = -i\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}} + i\delta^2\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} = -i(1 + \delta^2)\hat{\mathbf{x}}$. La forza media è indipendente dalla polarizzazione.

Si hanno punti di equilibrio laddove $\sin(2kx) = 0$. I punti di equilibrio stabile sono i minimi del “potenziale” U tale che $F_x = -dU/dx$,

$$U = \frac{q^2}{8mc\omega k} E_0^2 \cos(2kx) , \quad (19)$$

quindi nei punti $x = x_m$ tali che $2kx_m = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Intorno a un punto di minimo, essendo $\cos(2kx) \simeq -1 + (2k(x - x_m))^2/2$, si ha

$$U \simeq U_{\min} + \frac{m}{2} \left(\frac{qE_0}{\sqrt{2}mc} \right)^2 (x - x_0)^2 , \quad (20)$$

da cui la frequenza delle piccole oscillazioni $\Omega = qE_0/(\sqrt{2}mc)$.