

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2014-2015

Compito di Fisica 2 (20/07/2015)

1

Il sistema in figura è formato da un filo lungo h sul quale si trova la carica Q distribuita con densità lineare uniforme $\lambda = Q/h$, e da una lamina cilindrica coassiale al filo avente uguale altezza h , raggio $a \ll h$ e spessore trascurabile sulla quale si trova la carica $-Q$ distribuita con densità superficiale uniforme $\sigma = -Q/(2\pi ah)$. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Calcolare il campo elettrostatico $\mathbf{E}_s$ all'interno e all'esterno della superficie cilindrica.

Il sistema si trova in un campo magnetico uniforme (generato da sorgenti esterne) $\mathbf{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}}\hat{\mathbf{z}}$ il cui valore a $t = 0$ è B_0 . Per $t > 0$ il campo viene spento con una data legge $\mathbf{B}_{\text{ext}}(t)$ fino a raggiungere il valore nullo.

b) Calcolare il campo elettrico indotto $\mathbf{E}_i$ in funzione di $\mathbf{B}_{\text{ext}}(t)$ (si supponga valida l'approssimazione di correnti lentamente variabili).

c) Assumendo che la superficie cilindrica esterna possa ruotare intorno all'asse del sistema con momento d'inerzia I_c e attrito trascurabile, calcolare la velocità angolare finale della superficie, trascurando l'effetto del moto delle cariche di superficie.

d) Si risponda di nuovo alla domanda **c)** tenendo conto del campo magnetico generato dal moto delle cariche di superficie.

e) (facoltativo) Sapendo che il momento angolare del campo elettromagnetico è dato da

$$\mathbf{L}_{\text{EM}} = \int \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{S}}{c^2} d^3x, \quad (1)$$

dove $\mathbf{S}/c^2 = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ è la densità di quantità di moto, si calcoli il momento angolare del sistema a $t = 0$ e si usi il risultato per calcolare nuovamente la velocità angolare finale.

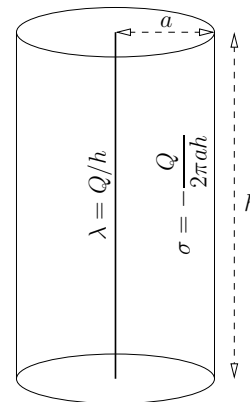
2

Una particella con massa m , carica q e velocità $\mathbf{V}$ (con $V \ll c$) entra in una regione di campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$. Si supponga di voler misurare i valori di m , q e $\mathbf{V}$ a partire dalla conoscenza di $\mathbf{B}$ e dall'analisi della radiazione emessa. A tal fine:

a) si determini la legge del moto generale della particella;

b) supponendo che la frequenza misurata della radiazione dipenda dall'angolo di osservazione θ rispetto all'asse z secondo la legge $\omega(\theta) = \omega_0(1 + K \cos \theta)$, si dica come le quantità misurate ω_0 e K sono legate ai parametri da determinare;

c) supponendo che la potenza irradiata decresca nel tempo, si determini la relativa legge temporale e la velocità finale della particella.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (3)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}) , \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0) , \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp , \quad (4)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

SOLUZIONI

1

a) Dal teorema di Gauss applicato a una superficie cilindrica coassiale di raggio r abbiamo

$$2\pi r h E_s(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\varepsilon_0} h & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \quad (5)$$

da cui

$$E_s(r) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h r} & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \quad (6)$$

b) Per simmetria il campo elettrico indotto è azimutale e la sua intensità dipende solo da r , abbiamo cioè $\mathbf{E}_i = E_i(r, t)\hat{\phi}$, quindi dalla legge di Faraday-Neumann abbiamo

$$\mathcal{E} = 2\pi r E_i = -d_t \Phi = -\pi r^2 \partial_t B_{\text{ext}}(t) \quad (7)$$

$$E_i = -\frac{r}{2} \partial_t B_{\text{ext}}(t) \quad (8)$$

c) La forza, azimutale, $d\mathbf{f}$ che agisce su un elemento d^2x della superficie del cilindro vale

$$d\mathbf{f} = \hat{\phi} df = \hat{\phi} \sigma E_i(r=a) d^2x = -\hat{\phi} \sigma \frac{a}{2} \partial_t B_{\text{ext}}(t) a d\phi dz, \quad (9)$$

per cui il momento meccanico $d\mathbf{M}$ che agisce sullo stesso elemento di superficie vale

$$d\mathbf{M} = \hat{\mathbf{z}} a df, \quad (10)$$

e il momento meccanico complessivo su tutta la superficie è

$$\mathbf{M} = -\pi a^3 h \sigma \partial_t \mathbf{B}_{\text{ext}}(t), \quad (11)$$

e per l'equazione del moto abbiamo

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{M} \quad (12)$$

con soluzione

$$\omega(t) = -\frac{\pi a^3 h}{I_c} \sigma [\mathbf{B}_{\text{ext}}(t) - \mathbf{B}_{\text{ext}}(0)] \quad (13)$$

da cui otteniamo la velocità angolare finale del cilindro

$$\omega(\infty) = \frac{\pi a^3 h}{I_c} \sigma \mathbf{B}_0 = -\frac{a^2}{2I_c} Q \mathbf{B}_0 \quad (14)$$

d) La corrente superficiale dovuta alla rotazione della superficie cilindrica vale

$$\boldsymbol{\iota} = \sigma \mathbf{v} = \sigma a \omega \hat{\phi}. \quad (15)$$

Questa genera all'interno un campo magnetico equivalente a quello di un solenoide (infinito nei limiti delle nostre approssimazione) con prodotto $nI = \iota$, dove n è il numero di spire per unità di lunghezza e I la corrente che circola nella singola spira. Quindi abbiamo

$$\mathbf{B}_i = \mu_0 \iota \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 \sigma a \boldsymbol{\omega} . \quad (16)$$

Procedendo come al punto precedente abbiamo

$$\mathbf{M} = -\pi a^3 h \sigma \partial_t [\mathbf{B}_{\text{ext}}(t) + \mathbf{B}_i(t)] \quad (17)$$

$$I_c \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\pi a^3 h \sigma \partial_t \mathbf{B}_{\text{ext}}(t) - \mu_0 \pi a^4 h \sigma^2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (18)$$

La soluzione è la stessa del punto precedente se effettuiamo la sostituzione

$$I_c \rightarrow I'_c = I_c + \mu_0 \pi a^4 h \sigma^2 \quad (19)$$

L'autoinduzione si manifesta così come un momento d'inerzia aggiuntivo.

e) Il momento angolare per unità di volume del campo elettromagnetico vale

$$\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{S}}{c^2} = -\varepsilon_0 r E_s B_z \hat{\mathbf{z}} \quad (20)$$

(il termine contenente il campi d'induzione $\mathbf{E}_i$, solenoidale, si annulla; qui B_z contiene sia il campo esterno che quello autoindotto). Il momento angolare complessivo vale così

$$L_z = -\varepsilon_0 B_z \int_0^a r \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r} 2\pi r h dr = -\frac{1}{2} B_z \lambda h a^2 \quad (21)$$

Trascurando l'autoinduzione, la conservazione del momento angolare dà

$$I_c \boldsymbol{\omega}(\infty) = -\frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \lambda h a^2 = -\frac{1}{2} \mathbf{B}_0 Q a^2 \quad (22)$$

equivalente alla (14).

Tenendo conto anche di $\mathbf{B}_i = \mu_0 \sigma a \boldsymbol{\omega}$ si ottiene

$$\frac{1}{2} (B_0 - \mu_0 \sigma a \omega) \lambda h a^2 = -I_c \omega \quad (23)$$

da cui si riottiene la (19).

2

a) La traiettoria è elicoidale, con velocità $V_{\parallel} = \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ lungo la direzione di $\mathbf{B}$, e moto circolare uniforme con velocità $V_{\perp} = |\mathbf{V} \times \hat{\mathbf{z}}|$ e frequenza $\omega_c = qB/m$ nel piano perpendicolare a $\mathbf{B}$.

b) Per effetto del moto circolare la particella emette radiazione alla frequenza ω_c nel sistema in cui la componente della velocità lungo $\mathbf{B}$ è nulla. Nel sistema del laboratorio si osserva lungo $\hat{\mathbf{z}}$ uno spostamento Doppler dato da

$$\omega \simeq \omega_c (1 + \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{z}}/c) = \omega_c (1 + V \cos \theta/c) . \quad (24)$$

Quindi, confrontando con la dipendenza osservata si ottiene $\omega_0 = \omega_c$, da cui si può misurare il rapporto q/m , e $K = V/c$.

c) Innanzitutto osserviamo che la particella mantiene la propria velocità lungo il campo magnetico $V_{\parallel}$. Questo poiché mettendosi nel riferimento in cui la componente della velocità lungo $\mathbf{B}$ è nulla, la carica compie un moto a spirale perdendo per irraggiamento l'energia cinetica associata alla velocità trasversale; nello stato finale la carica è quindi priva di energia nel riferimento mobile e quindi si muove con velocità uniforme nel sistema del laboratorio.

La perdita di energia cinetica per irraggiamento è descritta dall'equazione

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) = -\frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = -\frac{2k_0}{3c^3} |q\dot{\mathbf{v}}|^2 = -\frac{2k_0q^2}{3c^3} \left| \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right|^2 = -\frac{2k_0q^4B^2}{3m^2c^3} v_{\perp}^2, \quad (25)$$

che dà

$$v_{\perp}(t) = V_{\perp} e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{3m^3c^3}{2k_0q^4B^2} = \frac{3c}{2r_c\omega_c^2}, \quad (26)$$

dove $r_c = k_0q^2/(mc^2)$. In teoria quindi la misura di τ combinata alla misura precedente di q/m consentirebbe di determinare q e m .