

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (20/07/2016)

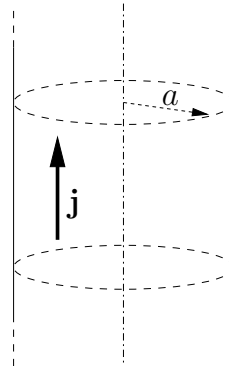
1

Nel sistema S del laboratorio una corrente costante I scorre sulla superficie di un cilindro infinito di raggio a , parallelamente all'asse del cilindro, così che la corrente superficiale è $\mathbf{j} = (I/2\pi a)\hat{\mathbf{z}}$ con $\hat{\mathbf{z}}$ la direzione assiale. Calcolare

- a) il campo magnetico in tutto lo spazio,
- b) la forza magnetica per unità di superficie stabilendo in particolare se il cilindro tende a espandersi o a implodere.

Si consideri ora un sistema S' in moto rispetto a S con velocità $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{z}}$. Calcolare in S'

- c) i campi elettrico e magnetico e le densità di carica e corrente,
- d) la forza per unità di superficie, confrontando col risultato in b).



2

Un cilindro di lunghezza molto grande rispetto al raggio a possiede una magnetizzazione uniforme $\mathbf{M}$ parallela al proprio asse.

- a) Dimostrare che nel limite di lunghezza infinita il campo magnetico è $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}$ all'interno del cilindro ($r < a$) e nullo fuori dal cilindro ($r > a$).

Si assuma che la magnetizzazione decada spontaneamente in maniera "lenta" secondo la legge $\mathbf{M} = \mathbf{M}(0)e^{-t/\tau}$.

- b) Usando l'approssimazione di correnti lentamente variabili, calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio, determinando a posteriori le condizioni per cui l'approssimazione è giustificata.
- c) Calcolare il vettore di Poynting e il suo flusso su una superficie cilindrica coassiale al cilindro, sia per $r < a$ che per $r > a$: si discuta la conservazione dell'energia per il sistema.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x = \mathbf{J}Sd\boldsymbol{\ell} = Id\boldsymbol{\ell}$.

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \equiv \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (3)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (4)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_{\parallel} = \gamma(A_{\parallel} - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp}, \quad (5)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c), \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad B'_{\perp} = \gamma(B_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c), \quad (6)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_{\phi} V_z - \partial_z V_{\phi}, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_{\phi}) - \partial_{\phi} V_r)). \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) Per simmetria $\mathbf{B} = B_\phi(r)\hat{\phi}$. Applicando il teorema di Stokes a una linea di forza di raggio r , si ottiene $B_\phi = \mu_0 I / 2\pi r$ per $r > a$ e $B_\phi = 0$ per $r < a$.

b) Consideriamo un elemento infinitesimo di superficie avente area $dS = a d\phi dz$. La corrente che scorre lungo l'elemento, in direzione $\hat{\mathbf{z}}$, è $dI = j_z a d\phi$. La forza magnetica è

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2} j a d\phi dz \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}(r = a^+) = -\frac{1}{2} j_z a B_\phi(a^+) d\phi dz \hat{\mathbf{r}} \quad (8)$$

dove il fattore $1/2$ è inserito essendo il campo nullo da un lato della superficie e uguale a $\mathbf{B}(r = a^+) = (\mu_0 I / 2\pi a)\hat{\phi}$ dall'altro. La forza è quindi diretta verso l'interno, ovvero la corrente tende a collassare. La forza per unità di superficie $\mathbf{P}$ è così

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2} j_z B_\phi(a) \hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{2\mu_0} B_\phi^2(a) \hat{\mathbf{r}}. \quad (9)$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto col principio dei lavori virtuali. La variazione di energia magnetica può essere calcolata rapidamente osservando che se il raggio della superficie cilindrica aumenta di da , tra z e $z + dz$ scompare l'energia magnetica precedentemente contenuta nel volume infinitesimo $2\pi a da dz$, pari a $du = (1/2\mu_0) B_\phi^2(a^+) 2\pi a da dz$; per unità di lunghezza

$$dU_m = -\frac{du}{dz} = -\frac{1}{2\mu_0} B_\phi^2(a^+) 2\pi a da. \quad (10)$$

Poiché l'aumento del raggio provoca una diminuzione del flusso di $\mathbf{B}$ tra z e $z + dz$ pari a $d\Phi' = B(a) da dz$, il generatore che mantiene costante la corrente deve sviluppare la potenza $W = -\mathcal{E}I$ per compensare la potenza dovuta alla forza elettromotrice $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$. La variazione (per unità di lunghezza) dell'energia del generatore è quindi

$$dU_{\text{gen}} = -W dt = -I d\Phi = 2\pi a j B_\phi(a^+) da = 2\pi a \frac{1}{\mu_0} B^2(a) da = -2 dU_m. \quad (11)$$

La variazione totale è allora

$$dU_{\text{tot}} = dU_{\text{gen}} + dU_m = -dU_m. \quad (12)$$

L'energia totale aumenta se $da > 0$, quindi il cilindro tende a collassare; l'energia magnetica aumenta ma l'energia interna del generatore diminuisce di una quantità doppia. La forza per unità di superficie vale

$$P = -\frac{1}{2\pi a} \frac{dU_{\text{tot}}}{da} = +\frac{1}{2\pi a} \frac{dU_m}{da} = -\frac{1}{2\mu_0} B_\phi^2(a^+). \quad (13)$$

c) Poiché il campo magnetico è trasversale alla velocità di trasformazione e inoltre $r' = r$, in S' i campi sono dati da

$$B'_\phi = \gamma B_\phi, \quad E'_r = -\beta \gamma c B_\phi. \quad (14)$$

Le trasformazioni della quadricorrente danno per le densità superficiali di carica e

$$j'z = \gamma j_z, \quad \sigma' = -\beta \gamma j_z / c. \quad (15)$$

Queste espressioni sono coerenti coi campi. Ad esempio alla superficie $r = a^+$

$$E'_r(a^+) = \sigma'/\varepsilon_0 = -\beta\gamma j_z/\varepsilon_0 c = -\mu_0\beta\gamma c(I/2\pi a) = -\beta\gamma c B_\phi(a^+) . \quad (16)$$

d) Poiché sia il campo magnetico che la corrente aumentano in S' di un fattore γ rispetto a S , la tensione magnetica aumenta di un fattore γ^2 , ovvero $P'_m = -B_\phi'^2(a^+)/2\mu_0 = -\gamma^2 B_\phi^2(a^+)/2\mu_0 = \gamma^2 P_m$. Questa forza viene però parzialmente bilanciata dalla tensione elettrostatica

$$P'_e = \frac{1}{2}\sigma' E'_r(a^+) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_r'^2(a^+) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\beta^2\gamma^2 c^2 B_\phi^2(a^+) = \frac{1}{2\mu_0}\beta^2\gamma^2 B_\phi^2(a^+) = -\beta^2\gamma^2 P_m , \quad (17)$$

da cui

$$P'_m + P'_e = (1 - \beta^2)\gamma^2 P_m = P_m , \quad (18)$$

cioè la forza per unità di superficie è la stessa in entrambi i sistemi.

2

a) Il cilindro magnetizzato è equivalente a un solenoide con corrente superficiale $\mathbf{j}_s = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = M\hat{\boldsymbol{\phi}}$, ovvero per il solenoide $nI \equiv M$. Segue che $\mathbf{B} = \mu_0 j_s \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 \mathbf{M}$.

b) Usando l'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ otteniamo

$$E_\phi = \begin{cases} -\frac{\mu_0 \dot{M} r}{2} = \frac{\mu_0 M r}{2\tau} , & (r < a) \\ = -\frac{\mu_0 \dot{M} a^2}{2r} = \frac{\mu_0 M a^2}{2\tau r} , & (r > a) \end{cases} \quad (19)$$

Per verificare l'approssimazione si può stimare il campo B_1 indotto da E_ϕ e imporre $B_1 \ll B_0 \equiv \mu M/2\pi a$. Usando $\nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}/c^2$ otteniamo

$$\partial_r B_1 = \frac{E_\phi}{c^2 \tau} = \frac{\mu_0 M}{c^2 \tau^2} r , \quad (20)$$

ovvero

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 M r^2}{2c^2 \tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{c\tau} \right)^2 B_0 + B_1(0) . \quad (21)$$

La costante di integrazione può essere fissata imponendo $B_1(a) = 0$: questo perché ogni “strato” cilindrico di corrente di spostamento può essere vista come la corrente materiale in un solenoide, che quindi genera campo magnetico solo all'interno del cilindro. Si ha allora

$$B_1(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2 - a^2}{(c\tau)^2} \right)^2 B_0 . \quad (22)$$

Quindi il valore massimo della correzione a $\mathbf{B}$ è $B_1(0) = (a/c\tau)^2 B_0/2$, e si ha $B_1 \ll B_0$ se $a/c\tau \ll 1$.

c) All'ordine più basso in $a/c\tau$, si ha per $r < a$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 M^2}{2\tau} \mathbf{r} = \frac{B^2}{2\mu_0 \tau} \mathbf{r} \quad (r < a) . \quad (23)$$

Il flusso di $\mathbf{S}$ (per unità di lunghezza) sul cilindro di raggio r è

$$\Phi(\mathbf{S}) = \mathbf{S} \cdot 2\pi\mathbf{r} = \frac{\pi B^2 r^2}{\mu_0 \tau} \quad (r < a) , \quad (24)$$

che è opposto alla variazione dell'energia magnetica associata al volume del cilindro:

$$\left. \frac{dU_m}{dt} \right|_{r < a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 \right) = -\frac{2}{\tau} \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 = -\Phi(\mathbf{S}) . \quad (25)$$

La variazione dell'energia associata al campo elettrico indotto $\mathbf{E}$ non compare essendo di ordine superiore in $a/c\tau$.

Per $r > a$, banalmente $\mathbf{S} = 0$ all'ordine più basso essendo $\mathbf{B} = 0$ se si trascura la corrente di spostamento. Il teorema di Poynting afferma allora la variazione dell'energia magnetica deve essere uguale al lavoro fatto sulle correnti. Si ha infatti

$$\left. \frac{dU_m}{dt} \right|_{r > a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \pi a^2 \right) = -\frac{2}{\tau} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \pi a^2 , \quad (26)$$

mentre

$$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3r = j_s E(a) 2\pi a = M \left(\frac{\mu_0 M a}{2\tau} \right) 2\pi a = \frac{\mu_0 \pi M^2 a^2}{\tau} = \frac{\pi a^2 B^2}{\mu_0 \tau} . \quad (27)$$