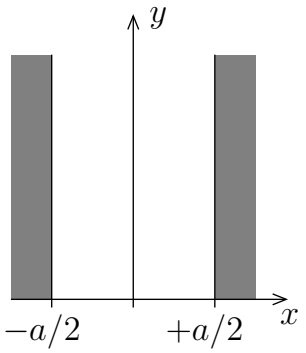
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2016-2017

Compito di Fisica 2 (21/07/2017)

1

Consideriamo la regione di spazio $|x| \leq a/2,\ y > 0$. I due semipiani $x = \pm a/2,\ y > 0$ sono perfettamente conduttori, mentre sul piano $y = 0$ è presente una densità di carica superficiale $\sigma(x) = \sigma_0 \cos(\pi x/a)$.



a) Mostrare che nella regione considerata il potenziale elettrostatico ha la forma $\varphi(x, y) = \varphi_0 \cos(kx)\, \mathrm{e}^{qy}$, e determinare i parametri φ_0, k e q.

Si supponga adesso che la densità di carica a $y = 0$ oscilli nel tempo con legge

$$\sigma(x,t) = \sigma_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\omega t = \mathrm{Re}\left[\sigma_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \mathrm{e}^{-i\omega t}\right] \ . \qquad (1)$$

Calcolare

b) la densità superficiale di corrente sul piano $y = 0$,

c) i potenziali scalare e vettore nella regione $|x| < a/2$, $y > 0$, discutendo la dipendenza da ω.

2

a) Dimostrare che in una sfera perfettamente conduttrice di raggio a, posta in un campo elettrico esterno costante e uniforme $\mathbf{E}_0$, viene indotto il momento di dipolo elettrico $\mathbf{p} = 3\varepsilon_0 V \mathbf{E}_0$, dove $V = (4\pi/3)a^3$.

b) Dimostrare che in una sfera perfettamente diamagnetica di raggio a, posta in un campo magnetico esterno costante e uniforme $\mathbf{B}_0$, viene indotto il momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = -(3/2\mu_0)V\mathbf{B}_0$ (suggerimento: si può partire dal risultato del punto **a)**).

Per una frequenza ω in un'opportuna regione spettrale si può assumere che un materiale conduttore schermi perfettamente i campi elettromagnetici, ovvero che sia $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = 0$ al suo interno. Su una sfera di detto materiale e raggio $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ incide un'onda elettromagnetica monocromatica piana di frequenza ω, linearmente polarizzata, con ampiezza del campo elettrico $\mathbf{E}_i$.

c) Considerando il solo dipolo elettrico, calcolare la potenza P_d diffusa dalla sfera (mediata sul periodo) e la sezione d'urto $\sigma_d = P_d/I$, dove I è l'intensità dell'onda incidente.

d) Calcolare il contributo P_m alla potenza diffusa dovuto al termine del dipolo magnetico, e il rapporto P_m/P_d (si può dimostrare - ma non è richiesto! - che le potenze totali dovute ai termini di dipolo elettrico e dipolo magnetico si sommano, senza effetti di interferenza).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\ . \tag{2}$$

Equazione di continuità (ρ: densità di carica, $\mathbf{J}$: densità di corrente)

$$\partial_t\rho=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}\ . \tag{3}$$

Campi di radiazione di dipolo elettrico e magnetico oscillanti

$$\mathbf{E}_e=k_0\frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\rm rit})\times\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{r}}}{rc^2}\mathrm{e}^{-i\omega t_{\rm rit}},\qquad \mathbf{E}_m=k_0\frac{\ddot{\mathbf{m}}(t_{\rm rit})\times\hat{\mathbf{r}}}{rc^3}\mathrm{e}^{-i\omega t_{\rm rit}}, \tag{4}$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2\ . \tag{5}$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo magnetico $\mathbf{m}=\mathbf{m}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^5}|\ddot{\mathbf{m}}|^2\ . \tag{6}$$

Equazioni d'onda per i potenziali vettore $\mathbf{A}$ e scalare φ nella Gauge di Lorentz:

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\mathbf{A}=-\mu_0\mathbf{J}\ ,\qquad \left(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\ , \tag{7}$$

con la condizione $c^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\partial_t\varphi=0$.

SOLUZIONI

1

a) Inserendo la soluzione proposta nell'equazione di Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ si ottiene

$$-k^2\varphi_0 \cos kx\, \mathrm{e}^{qy} + q^2\varphi_0 \cos kx\, \mathrm{e}^{qy} = 0 \,, \tag{8}$$

da cui $k^2 = q^2$. Le condizioni al contorno impongono $\varphi(x = \pm a/2, y) = 0$ indipendentemente da y, da cui $k = \pi/a$. Sul piano $y = 0$ dobbiamo avere

$$\varepsilon_0\sigma(x) = E_y(x, y = 0) = -\partial_y\varphi(x, y)|_{y=0} = -q\varphi_0 \cos(kx) \,, \tag{9}$$

da cui $\varphi_0 = -\sigma_0/(\varepsilon_0 q)$. Inoltre deve essere $q < 0$ per evitare la divergenza per $y \to +\infty$. Riassumendo abbiamo $q = -k = -\pi/a$ e $\varphi_0 = \sigma_0 a/(\pi\varepsilon_0)$.

b) L'equazione di continuità per le densità superficiali di corrente e di carica nel nostro caso si scrive $\partial_x K_x = -\partial_t\sigma$, da cui

$$K_x = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega a}{\pi}\sigma_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{-i\omega t}\right] \,. \tag{10}$$

c) Il potenziale scalare soddisfa per $y \neq 0$ l'equazione d'onda

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\varphi(x, y, t) = 0 \,. \tag{11}$$

Cercando una soluzione del tipo

$$\varphi(x, y, t) = \mathrm{Re}\left[\varphi_0 \cos(kx)\mathrm{e}^{qy}\mathrm{e}^{-i\omega t}\right] \,, \tag{12}$$

si ottiene $q^2 = k^2 - \omega^2/c^2$, mentre la condizione al bordo su $\mathbf{E}$ è analoga al caso precedente e impone $k = \pi/a$.

Se $\omega < \pi c/a$, si ha $q^2 > 0$ ovvero q è reale e deve essere $q < 0$ per evitare un campo che diverga per $y \to +\infty$, quindi $q = -\sqrt{(\pi/a)^2 - (\omega/c)^2}$: il campo è evanescente per $y > 0$.

Se $\omega > \pi c/a$, si ha $q^2 < 0$ ovvero q è immaginario puro, $q = i\sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/a)^2}$; il campo si propaga all'infinito nella regione $y > 0$.

Per il potenziale vettore la trattazione è analoga a partire dall'equazione per l'unica componente (parallela alla corrente superficiale)

$$A_x(x, y, t) = \mathrm{Re}\left[A_0 \sin(kx)\mathrm{e}^{qy}\mathrm{e}^{-i\omega t}\right] \,, \tag{13}$$

con condizione al bordo

$$\mu_0 K_x(x, t) = B_z(x, y = 0, t) = \partial_y A_x(x, y, t)|_{y=0} = qA_x(x, 0, t) \,, \tag{14}$$

da cui $A_0 = (i\mu_0\omega a/\pi q)\sigma_0$.

2

a) Una sfera con polarizzazione elettrica uniforme $\mathbf{P}$ genera al suo interno il campo

$$\mathbf{E}_{ind} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\,. \tag{15}$$

Quindi, affinché il campo totale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{ind} = 0$, deve essere $\mathbf{E}_0 - \mathbf{P}/3\epsilon_0 = 0$ da cui

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}V = 3\varepsilon_0 V \mathbf{E}_0. \tag{16}$$

Per ritrovare la (15) possiamo schematizzare la sfera polarizzata come la sovrapposizione di due sfere cariche, di densità volumica di carica uniforme $\pm\rho$, i cui centri vengono separati per uno spostamento infinitesimo $\boldsymbol{\delta}$. Il campo totale nella regione di sovrapposizione è quindi dato da

$$\mathbf{E}_{ind} = +\frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\mathbf{r} - \frac{\boldsymbol{\delta}}{2}\right) - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\delta}}{2}\right) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\boldsymbol{\delta}\,. \tag{17}$$

ed è uniforme. Al limite $\boldsymbol{\delta} \to 0$, ma con il prodotto $\rho\boldsymbol{\delta} = \mathbf{P}$ finito, il sistema è equivalente a una sfera con polarizzazione uniforme $\mathbf{P} = \rho\boldsymbol{\delta}$, da cui la (15). Questo ragionamento rende anche evidente che all'esterno il campo è quello di un dipolo $\mathbf{p} = Q\boldsymbol{\delta}$ dove $Q = \rho(4\pi a^3/3)$, essendo equivalente al campo di due cariche puntiformi $\pm Q$ separate di $\boldsymbol{\delta}$.

Naturalmente il problema può essere risolto anche mostrando che la soluzione proposta soddisfa le opportune condizioni al contorno sulla superficie della sfera, oppure usando il metodo delle cariche immagine.

b) L'eguaglianza tra le equazioni della magnetostatica e dell'elettrostatica dei mezzi per lo scambio $\mathbf{H} \leftrightarrow \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{D}$ permette di concludere che, in analogia con la (15), una magnetizzazione $\mathbf{M}$ uniforme nella sfera produce il campo $\mathbf{H}_{ind} = -\mathbf{M}/3$. Quindi il campo magnetico totale all'interno è

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0(\mathbf{H}_{ind} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}_0 + \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}, \tag{18}$$

per cui ponendo $\mathbf{B} = 0$ si ottiene il risultato cercato

$$\mathbf{M} = -\frac{3}{2\mu_0}\mathbf{B}_0, \qquad \mathbf{m} = \mathbf{M}V. \tag{19}$$

c) Sia $\mathbf{E}_i(x,t) = \mathbf{E}_i\cos(kx - \omega t)$ il campo elettrico dell'onda incidente. Poiché $a \ll \lambda$, si può assumere il campo come uniforme sul volume della sfera e trascurare la dipendenza da x, cosicché la sfera si trova in un campo esterno $\mathbf{E}_0(t) = \mathbf{E}_i\cos(\omega t)$. Per quanto visto sopra il momento di dipolo indotto è $\mathbf{p} = 3\varepsilon_0 V\mathbf{E}_i\cos(\omega t)$ Applichiamo allora la formula di Larmor per la potenza media irraggiata

$$P_{irr} = \frac{2k_0}{3c^3}\left\langle|\ddot{\mathbf{p}}|^2\right\rangle = \frac{k_0}{3c^3}\omega^4\left(4\pi\varepsilon_0 a^3\right)^2|\mathbf{E}_i|^2. \tag{20}$$

L'intensità dell'onda è

$$I = \langle S_x\rangle = \varepsilon_0 c^2\left\langle[\mathbf{E}_i(t)\times\mathbf{B}_i(t)]_x\right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c|\mathbf{E}_i|^2. \tag{21}$$

Riarrangiando l'espressione precedente si può infine scrivere

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi a^2\left(\frac{a\omega}{c}\right)^4 = \frac{8}{3}(2\pi)^4\pi a^2\left(\frac{a}{\lambda}\right)^4. \tag{22}$$

d) L'ampiezza dei campi generati dai termini di dipolo elettrico e magnetico sono rispettivamente proporzionali a $\ddot{\mathbf{p}}$ e $\ddot{\mathbf{m}}/c$. Quindi, per campi armonici basta confrontare $p = |\mathbf{p}|$ con $m = |\mathbf{m}|/c$. Nel caso presente

$$\frac{p}{m/c} = \frac{3\varepsilon_0 V E_i}{(3/2\mu_0) V B_i/c} = \frac{2\varepsilon_0\mu_0 E_i}{E_i/c^2} = 2, \tag{23}$$

quindi il termine di dipolo magnetico è la metà di quello di dipolo elettrico e sarà in generale *non* trascurabile. Il contributo alla sezione d'urto, nell'ipotesi che le potenze irraggiate siano sommabili, è quindi un quarto del contributo del dipolo elettrico (la potenza irraggiata di dipolo magnetico ha la stessa espressione di quella del dipolo elettrico a meno della sostituzione $\ddot{\mathbf{p}} \to \ddot{\mathbf{m}}/c$) per cui in totale

$$\sigma = \frac{10}{3}\pi a^2 \left(\frac{a\omega}{c}\right)^4 = \frac{10}{3}(2\pi)^4 \pi a^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4. \tag{24}$$