# Corso di Laurea in Fisica
# Anno Accademico 2017-2018

## Compito di Fisica 2 (09/07/2018)

## 1

Un conduttore ha la forma di un toro a sezione rettangolare avente raggio esterno $b$, raggio interno $a$ e altezza $h$ con $b > a \gg h$. Il conduttore fa da "tappo" terminale a un cavo coassiale avente uguali raggio interno ed esterno. Si assuma che nel cavo scorra una corrente continua (ovvero costante nel tempo) $I$ che, nel passaggio tra le armature interna ed esterna del cavo, attraversa il "tappo" all'interno del quale la densità di corrente è radiale, ovvero $\mathbf{J} = J_r(r)\hat{\mathbf{r}}$ dove $r$ è la distanza dall'asse del sistema in coordinate cilindriche. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

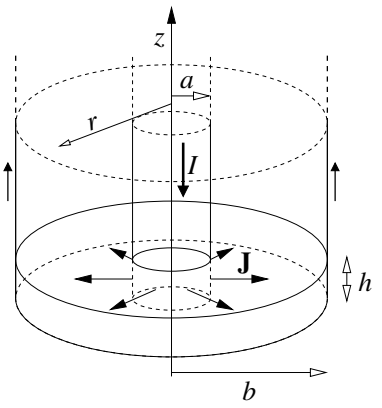

Figura 1

**a)** Si scriva l'espressione di $\mathbf{J}$ in funzione di $I$ e della distanza $r$ dall'asse del cavo.

**b)** Supponendo che il tappo sia costituito da un metallo Ohmico per cui il campo elettrico $\mathbf{E} = \eta\mathbf{J}$ essendo $\eta$ la resistività, calcolare la resistenza $R$ del tappo.

**c)** Calcolare le densità di carica sulle superfici di contatto a $r = a$ e $r = b$, spiegando anche perché la densità di carica volumica $\rho$ è nulla.

Si consideri ora il tappo in rotazione con velocità angolare costante $\omega$ attorno all'asse del cavo, in presenza di un campo magnetico esterno, costante e uniforme $\mathbf{B}$ parallelo all'asse, come in Fig.2. Si assuma ancora una corrente continua $I$ (le superfici rimangono in contatto elettrico strisciando senza attrito) e una densità di corrente radiale trascurando sia l'eventuale comparsa di correnti solenoidali sia il campo magnetico generato dalle correnti.

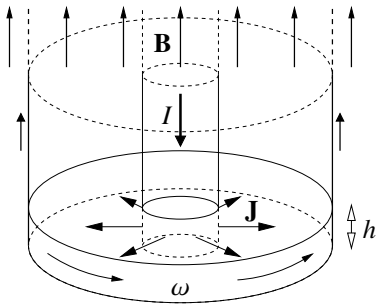

Figura 2

**d)** Si calcoli (sempre in funzione di $I$) il campo $\mathbf{E}$ all'interno del tappo in presenza di $\mathbf{B}$. Si calcolino anche le corrispondenti densità di carica volumica e superficiale.

**e)** Calcolare il momento esercitato dal campo magnetico sul tappo in rotazione e la potenza meccanica $P_m$ esercitata per mantenere la velocità angolare costante.

**f)** Imponendo che $P_m$ sia uguale alla potenza dissipata per effetto Joule nel tappo rotante $P_d$, determinare una relazione fra $I$ e $B$.

## 2

Un'onda elettromagnetica (EM) piana e monocromatica avente frequenza $\omega_i$ e ampiezza del campo elettrico $E_i$ incide perpendicolarmente sulla superficie di un mezzo semi-infinito avente indice di

rifrazione $\mathsf{n}$ reale e positivo. Le seguenti formule di Fresnel forniscono i rapporti tra le ampiezze del campo elettrico delle onda riflessa/trasmessa e dell'onda incidente:

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{1-\mathsf{n}}{1+\mathsf{n}}\,, \qquad \frac{E_t}{E_i} = \frac{2}{1+\mathsf{n}}\,, \tag{1}$$

Si consideri ora il caso in cui il mezzo si muove nel sistema del laboratorio $S$ con velocità $\mathbf{V}$ perpendicolare alla superficie.

Assumendo che $\mathsf{n}$ sia indipendente dalla frequenza, calcolare in $S$

**a)** la frequenza delle onde riflessa e trasmessa,

**b)** le ampiezze dei campi elettrico e magnetico delle onde riflessa e trasmessa.

**c)** Come cambiano le risposte precedenti se $\mathsf{n} = \mathsf{n}(\omega)$ cioè dipende dalla frequenza?

**NB** Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

## FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\,. \tag{2}$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J}\times\mathbf{B}d^3x\,. \tag{3}$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A_0' = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A})\,, \qquad A_\parallel' = \gamma(A_\parallel - \beta A_0)\,, \qquad \mathbf{A}_\perp' = \mathbf{A}_\perp\,, \tag{4}$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E_\parallel' = E_\parallel\,, \qquad E_\perp' = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}c) \qquad B_\parallel' = B_\parallel\,, \qquad B_\perp' = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}/c)\,. \tag{5}$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema $S'$ rispetto al sistema $S$, e "$\parallel$" e "$\perp$" sono riferite a $\mathbf{V}$.

Relazione di dispersione di un mezzo caratterizzato da un indice di rifrazione $\mathsf{n} = \mathsf{n}(\omega)$

$$\omega^2 = \frac{k^2c^2}{\mathsf{n}^2(\omega)}\,. \tag{6}$$

Operatore divergenza in coordinate cilindriche $(r, \phi, z)$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V} = r^{-1}\partial_r(rV_r) + r^{-1}\partial_\phi V_\phi + \partial_z V_z\,. \tag{7}$$

# SOLUZIONI

## 1

**a)** Consideriamo un toro a sezione rettangolare interno al tappo, di raggio interno $a$, raggio esterno $r < b$ e altezza $h$. Il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la superficie laterale esterna è, usando la simmetria del problema e l'equazione di continuità $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$,

$$I = \int_{\text{sup. lat.}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi r h J_r \ , \quad \text{da cui} \quad \mathbf{J}(r) = \frac{I}{2\pi h r}\, \hat{\mathbf{r}} \ . \tag{8}$$

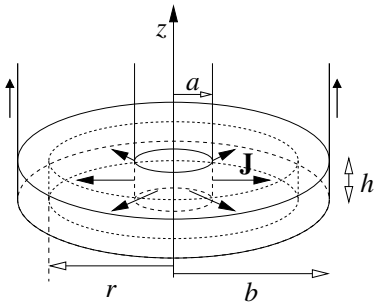

Figura 3

**b)** La differenza di potenziale tra le superfici laterali interna ed esterna del toro è

$$V = -\int_a^b E(r)\, \mathrm{d}r = -\int_a^b \eta J_r(r)\, \mathrm{d}r = -\frac{\eta I}{2\pi h}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\eta I}{2\pi h}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \ , \tag{9}$$

mentre per la resistenza abbiamo

$$R = \left|\frac{V}{I}\right| = \frac{\eta}{2\pi h}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \ . \tag{10}$$

**c)** Per le densità di carica superficiali alle superfici laterali del toro abbiamo dal teorema di Gauss, ricordando che il campo elettrico è nullo sia per $r < a$ che per $r > b$,

$$\sigma_a = \varepsilon_0 \left[E(a^+) - E(a^-)\right] = \frac{\varepsilon_0 \eta I}{2\pi h a} \ , \qquad \sigma_b = \varepsilon_0 \left[E(b^+) - E(b^-)\right] = -\frac{\varepsilon_0 \eta I}{2\pi h b} \ . \tag{11}$$

Invece per la densità di carica volumica nel materiale del toro abbiamo

$$\rho = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot (\eta \mathbf{J}) = \varepsilon_0 \eta \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \ . \tag{12}$$

**d)** La rotazione attorno all'asse conserva la simmetria cilindrica del problema. Essendo in condizioni stazionarie, vale ancora la $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$. Procedendo in modo analogo al punto **a)** la (8) si riscrive

$$I = \int_{\text{sup. lat.}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 2\pi r h J_r \ , \quad \text{da cui} \quad J_r(r) = \frac{I}{2\pi h r} \ , \tag{13}$$

risultato valido indipendentemente dalla presenza o meno del campo magnetico $\mathbf{B}$. La presenza di $\mathbf{B}$ in aggiunta alla rotazione introduce un termine aggiuntivo nella forza di Lorentz sul singolo portatore di carica $q$, dovuto alla velocità di trascinamento $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, pari a $\mathbf{f}_B = \omega B \mathbf{r}$. D'altra parte, per simmetria e per la condizione $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$ ($\mathbf{B}$ è costante) l'unica componente non nulla di $\mathbf{E}$ è $E_r$, cioè $\mathbf{E} = E_r\, \hat{\mathbf{r}}$, quindi abbiamo

$$\eta J_r = \frac{\eta I}{2\pi h r} = E_r + \omega B r \ , \quad \text{da cui} \quad E_r(r) = \frac{\eta I}{2\pi h r} - \omega B r = \eta J_r - \omega B r \ . \tag{14}$$

Per la densità volumica di carica abbiamo, ricordando che la divergenza di $\mathbf{J}$ in condizioni stazionarie è nulla,

$$\rho(r) = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\omega B \mathbf{r}) = \varepsilon_0 \frac{1}{r}\, \partial_r(-\omega B r^2) = -2\omega B \ . \tag{15}$$

Per le densità superficiali abbiamo infine

$$\sigma_a = \varepsilon_0 \left[E(a^+) - E(a^-)\right] = \frac{\varepsilon_0 \eta I}{2\pi h a} - \omega B a \,, \qquad \sigma_b = \varepsilon_0 \left[E(b^+) - E(b^-)\right] = -\frac{\varepsilon_0 \eta I}{2\pi h b} + \omega B b \,. \quad (16)$$

Notiamo che la comparsa di una densità di carica $\rho$ non nulla implica la comparsa di una componente solenoidale "di trascinamento" $J_\phi(r) = \rho(r)\mathbf{V}(r)$. Questa corrente in linea di principio modifica il campo magnetico lungo $\hat{\mathbf{z}}$ ma per velocità di rotazione "realistiche" questo campo è piccolo e può essere trascurato rispetto a un campo esterno abbastanza forte. Inoltre $J_\phi$ non contribuisce al momento delle forze magnetiche sul tappo (vedi punto seguente).

**e)** Il momento esercitato dal campo magnetico sul tappo coinvolge solo la componente azimutale della forza per unità di volume, che è

$$f_{v\varphi}(r) = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_\varphi = -J_r(r) B_z = -\frac{IB}{2\pi h r} \,, \quad (17)$$

indipendente dalla componente azimutale di $\mathbf{J}$. Il momento totale $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ si ottiene integrando il momento di $\mathbf{f}_v$ rispetto all'asse di simmetria del sistema sul volume del toro

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{f}_v \, r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\, r \mathrm{d}z = \hat{\mathbf{z}} \int_a^b r f_{v\varphi} \, 2\pi h r \, \mathrm{d}r \quad \text{da cui}$$
$$M = -\frac{IB}{2\pi h} \int_a^b 2\pi h r \, \mathrm{d}r = -\frac{IB}{2} \left(b^2 - a^2\right) \,. \quad (18)$$

La potenza meccanica necessaria per mantenere la rotazione a velocità angolare costante è

$$P_m = -\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{IB\omega}{2} (b^2 - a^2). \quad (19)$$

**f)** La potenza dissipata per effetto Joule nel tappo rotante vale

$$P_d = \int \eta J_r^2 r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = \int_a^b \eta J_r^2 2\pi h r \mathrm{d}r = \frac{\eta I^2}{2\pi h} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = RI^2 \,, \quad (20)$$

come potevamo aspettarci. Imponendo $P_d = P_m$ otteniamo

$$I = \frac{B\omega}{2R} (b^2 - a^2) \,, \quad (21)$$

ovvero la f.e.m. nel tappo è $\mathcal{E} = B\omega(b^2 - a^2)/2$.

## 2

**a)** Nel seguito definiamo il vettore d'onda con segno: $k > 0$ indica un'onda che si propaga da sinistra verso destra, $k < 0$ il viceversa.

Dalle trasformazioni di Lorentz per il quadrivettore d'onda otteniamo per l'onda incidente nel sistema $S'$ dove il mezzo è in quiete

$$\omega_i' = \gamma(1 - \beta)\omega_i \,, \qquad k_i' = \gamma(1 - \beta)k_i = \omega_i'/c \,, \quad (22)$$

essendo ovviamente $k_i = \omega_i/c$.

L'onda riflessa in $S'$ ha $\omega'_r = \omega'_i$ e $k'_r = -k'_i$. Con le trasformazioni inverse otteniamo

$$\omega_r = \gamma(1+\beta)\omega'_r = \frac{1-\beta}{1+\beta}\omega_i \ , \qquad k'_r = \gamma(1+\beta)k'_r = -\frac{1-\beta}{1+\beta}k_i \ . \tag{23}$$

La velocità di fase è $v_r = -c$.

L'onda trasmessa in $S'$ ha $\omega'_t = \omega'_i$ e $k'_t = \mathsf{n}k'_i = \mathsf{n}\omega'_i/c$. Con le trasformazioni inverse otteniamo

$$\omega_t = \gamma(\omega'_t + \beta c k'_t) = \gamma(1+\beta\mathsf{n})\omega'_i = \gamma^2(1+\beta\mathsf{n})(1-\beta)\omega_i \ , \tag{24}$$

$$k_t = \gamma(k'_t + \beta\omega'_t/c) = \gamma(\mathsf{n}+\beta)\omega'_i/c = \gamma^2(\mathsf{n}+\beta)(1-\beta)k_i \ . \tag{25}$$

La velocità di fase è $v_t = c(1+\beta\mathsf{n})/(\mathsf{n}+\beta)$.

**b)** Dalle trasformazioni di Lorentz per i campi otteniamo per l'onda incidente in $S'$

$$E'_i = \gamma(1-\beta)E_i \ , \qquad B'_i = E'_i/c \ . \tag{26}$$

L'onda riflessa in $S'$ ha $E'_r = E'_i(1-\mathsf{n})/(1+\mathsf{n})$, $B'_r = -E'_r/c$. Con le trasformazioni inverse otteniamo

$$E_r = \gamma(E'_r + \beta c B'_r) = \gamma(1-\beta)E'_r = \frac{1-\beta}{1+\beta}\frac{1-\mathsf{n}}{1+\mathsf{n}}E_i \ , \qquad B_r = -E_r/c \ . \tag{27}$$

L'onda trasmessa in $S'$ ha $E'_t = 2E'_t/(1+\mathsf{n})$, $B'_t = \mathsf{n}E'_t/c$. Con le trasformazioni inverse otteniamo

$$E_t = \gamma(E'_t + \beta c B'_t) = \frac{2\gamma}{1+\mathsf{n}}E'_i(1+\beta\mathsf{n}) = \frac{2\gamma^2(1-\beta)(1+\beta\mathsf{n})}{1+\mathsf{n}}E_i \ , \tag{28}$$

$$B_t = \gamma(B'_t + \beta E'_t/c) = \frac{2\gamma}{1+\mathsf{n}}\frac{E'_i}{c}(\mathsf{n}+\beta) \ , \tag{29}$$

cosicché

$$\frac{E_t}{B_t} = c\frac{1+\beta\mathsf{n}}{\mathsf{n}+\beta} = v_t \ . \tag{30}$$

**c)** Poiché l'indice di rifrazione è ben definito in $S'$, va valutato alla frequenza dell'onda in $S'$ e quindi nelle formule precedenti occorre sostituire $\mathsf{n}$ con $\mathsf{n}(\omega'_i)$.