

# Corso di Laurea in Fisica

## Anno Accademico 2018-2019

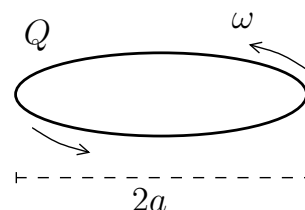
---

### Compito di Fisica 2 (08/07/2019)

---

1

Su di un anello sottile (*non* conduttore) di raggio  $a$  è uniformemente distribuita la carica  $Q$  con densità lineare  $Q/2\pi a$ . L'anello è mantenuto in rotazione non uniforme da opportune forze esterne con velocità angolare  $\omega = \omega(t)$  perpendicolare al piano dell'anello stesso. Si assuma noto il coefficiente di autoinduzione  $L$  di una spira circolare sottile di raggio  $a$ , che si può scrivere  $L = \alpha\mu_0 a$  dove  $\alpha$  è un coefficiente numerico dell'ordine dell'unità.

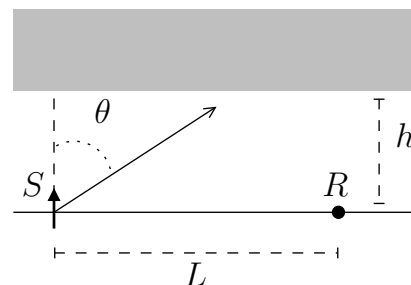


Calcolare in funzione di  $\omega(t)$  e delle sue derivate

- a) il campo elettrico  $\mathbf{E}(a)$  generato lungo l'anello,
- b) il momento delle forze  $\boldsymbol{\tau}_E$  esercitato da  $\mathbf{E}(a)$ , mostrando che il suo effetto è equivalente ad un aumento del momento d'inerzia  $J$  dell'anello;
- c) la potenza meccanica  $P_E$  sviluppata da  $\boldsymbol{\tau}_E$ , confrontandola con la variazione temporale dell'energia magnetica;
- d) la potenza irradiata dall'anello  $P_{\text{irr}}$ , confrontandola con  $P_E$  nel caso specifico  $\omega(t) = 0$  per  $t < 0$  e  $\omega(t) = \bar{\omega}t^2/\tau^2$  per  $t > 0$  dove  $\bar{\omega}$  e  $\tau$  sono costanti.

2

La ionosfera è schematizzabile rozzamente come un gas di elettroni liberi, caratterizzato dalla relazione di dispersione  $(kc/\omega)^2 = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ , esteso oltre un'altezza  $h$  dalla superficie terrestre. Sulla Terra si trova una stazione radio la cui antenna è schematizzabile come un dipolo elettrico perpendicolare alla superficie e che oscilla a una frequenza  $\omega_0$  *maggiore* della frequenza di plasma  $\omega_p$ .



- a) Detto  $\theta$  l'angolo di emissione rispetto alla direzione del dipolo, si dica per quali valori di  $\theta$  si ha riflessione totale dalla ionosfera nel punto locale di incidenza.
- b) Assumendo che la potenza totale irradiata dalla stazione radio sia  $P$ , si calcoli l'intensità della radiazione su un ricevitore posto sulla superficie terrestre in funzione della distanza  $L$  dalla stazione radio [NB: le formule di Fresnel sono date].
- c) Si dica se, in generale, il campo magnetico terrestre di ampiezza tipica  $10^{-5}$  T può avere effetti sulla propagazione delle onde radio nella ionosfera (convenzionalmente sono classificate come "radio" emissioni con lunghezza d'onda  $> 1$  mm; trasmissioni radio e televisive sono tipicamente nella banda 0.1–100 m).

**NB** Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

## FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2, \quad \frac{dP_{\text{irr}}}{d\Omega} = \frac{3P_{\text{irr}}}{4\pi} \sin^2 \theta . \quad (2)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{p}$  e la direzione di osservazione  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ .

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo magnetico  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^5} |\ddot{\mathbf{m}}|^2 . \quad (3)$$

Formule di Fresnel per la riflessione di un'onda piana incidente dal vuoto ad angolo  $\theta$  su un mezzo con indice di rifrazione  $n$  :

$$\frac{E_r}{E_i} = \begin{cases} \frac{\cos \theta - (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{\cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}} & \text{(polarizzazione S)} \\ \frac{n \cos \theta - (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}{n \cos \theta + (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}} & \text{(polarizzazione P)} \end{cases} \quad (4)$$

dove  $E_i$  e  $E_r$  sono rispettivamente le ampiezze del campo elettrico dell'onda incidente e dell'onda riflessa.

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2, \quad k_0 = 1/(4\pi \varepsilon_0) \quad (5)$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}. \quad (6)$$

# SOLUZIONI

1

a)

L'anello rotante con distribuzione rigida di carica equivale a una spira circolare con intensità di corrente  $I = \omega Q/2\pi$ . Quindi il flusso del campo magnetico auto-generato è  $\Phi_{\text{auto}} = LI$ . La variazione temporale di  $\omega = \omega(t)$  genera un campo elettrico di induzione  $\mathbf{E} = E(r)\hat{\phi}$ , diretto lungo  $\hat{\phi}$  per simmetria. La legge di Faraday applicata all'anello ( $r = a$ ) fornisce

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi a E(a) = -\frac{d}{dt}\Phi_{\text{auto}} = \frac{LQ}{2\pi}\dot{\omega}, \quad (7)$$

ovvero

$$E(a) = -\frac{LQ}{(2\pi)^2 a}\dot{\omega} = -\frac{\mu_0 \alpha Q}{(2\pi)^2}\dot{\omega}. \quad (8)$$

b)

La forza infinitesima tangenziale dovuta al campo elettrico su un elemento di carica  $dq$  è

$$df = E(a)dq = E(a)\frac{Q}{2\pi a}d\ell. \quad (9)$$

Il momento delle forze dovute al campo elettrico è quindi

$$\boldsymbol{\tau}_E = \hat{\mathbf{z}} \oint a df = \hat{\mathbf{z}} \oint E(a)\frac{Q}{2\pi}d\ell = E(a)Qa\hat{\mathbf{z}} = -\frac{LQ^2}{(2\pi)^2}\dot{\omega}\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0 \alpha Q^2 a}{(2\pi)^2}\dot{\omega}\hat{\mathbf{z}}. \quad (10)$$

L'equazione del moto dell'anello, detto  $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$  il momento delle forze esterne, è

$$J\dot{\omega} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} + \boldsymbol{\tau}_E, \quad (11)$$

che si può riscrivere

$$J'\dot{\omega} \equiv (J + J_{\text{EM}})\dot{\omega} = \left(J + \frac{LQ^2}{(2\pi)^2}\right)\dot{\omega} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} \quad (12)$$

Notare che la parte EM del momento d'inerzia si può scrivere come

$$J_{\text{EM}} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 a c^2} a^2 \equiv m_{\text{EM}} a^2, \quad (13)$$

dove  $m_{\text{EM}}$  è una sorta di “massa elettromagnetica” dell'anello carico.

c)

La potenza sviluppata dal campo elettrico induttivo è

$$P_E = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{LQ^2}{(2\pi)^2}\omega\dot{\omega}. \quad (14)$$

L'energia magnetica dell'anello è

$$U_{\text{mag}} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{L}{2} \left(\frac{\omega Q}{2\pi}\right)^2, \quad (15)$$

che fornisce

$$\frac{dU_{\text{mag}}}{dt} = L \left( \frac{Q}{2\pi} \right)^2 \omega \dot{\omega} = -P_E . \quad (16)$$

d)

Si ha emissione di dipolo magnetico con  $\mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{z}}$ . La potenza irradiata è

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^5} |\ddot{\mathbf{m}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^5} (\pi a^2)^2 \frac{Q^2}{2\pi} |\ddot{\omega}|^2 . \quad (17)$$

Quindi

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_E} = \frac{\pi^2}{3\alpha} \left( \frac{a}{c} \right)^3 \frac{\ddot{\omega}^2}{\omega \dot{\omega}} \quad (18)$$

Se  $\omega(t) = \bar{\omega}(t^2/\tau^2)$ , si ha (a meno di fattori numerici)

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_E} \sim \left( \frac{a}{ct} \right)^3 , \quad (19)$$

ovvero la potenza irradiata eccede quella sviluppata dal campo induttivo a tempi  $t < a/c$ .

## 2

a)

Dalla legge di Snell (o dal ragionamento sottostante) l'angolo limite oltre il quale si ha riflessione totale è dato da  $\sin \theta = n$ . Infatti per angoli maggiori i coefficienti di Fresnel (4) sono numeri complessi di modulo unitario, essendo l'indice di rifrazione dato da

$$n = \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2} . \quad (20)$$

b)

Il campo emesso dall'antenna dipolare giace nel piano di incidenza per cui occorre prendere il coefficiente di Fresnel per polarizzazione  $P$  ovvero la seconda delle (4). Indichiamo per brevità  $R_P = R_p(\theta) = |E_r/E_i|^2$ . Si ha quindi in generale

$$I(L) = \frac{3}{4\pi} P \frac{\sin^2 \theta}{r^2} R_p(\theta) , \quad (21)$$

dove  $\tan \theta = L/(2h)$  e  $r = 2(L^2/4 + h^2)^{1/2} = L/\sin \theta$  è la distanza percorsa dal segnale radio.

c)

L'effetto del campo magnetico è importante per frequenze vicine a quella di ciclotrone

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e} \simeq 1.8 \times 10^6 \text{ Hz} , \quad (22)$$

che corrisponde a lunghezze d'onda  $2\pi c/\omega_c \simeq 10^3$  m. Gli effetti relativi (e.g. anisotropia dell'indice di rifrazione, risonanza di ciclotrone) saranno osservabili quindi per onde "lunghe" rispetto a quelle usate per trasmissioni "standard".

Che conti la frequenza di ciclotrone lo si può giustificare richiamando il fatto che per onde che si propagano in un mezzo magnetizzato si ha tipicamente (a rigore a seconda della polarizzazione e della direzione relativa tra vettore d'onda e campo magnetico) risonanza per  $\omega = \omega_c$ .