

Corso di Laurea in Fisica  
Anno Accademico 2021-2022

---

---

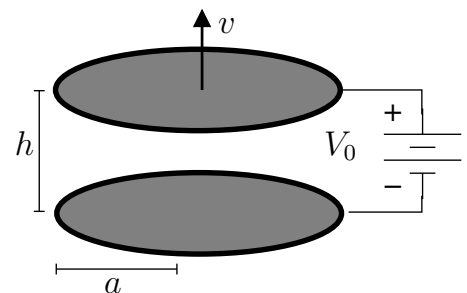
**Compito di Fisica 2A (18/07/2022)**

---

---

**1**

Un condensatore piano è formato da due armature metalliche parallele e circolari di superficie  $S = \pi a^2$  a distanza iniziale  $h_0 \ll a$ , connesse da un generatore ideale che mantiene la differenza di potenziale costante  $V_0$ . Mentre un'armatura viene tenuta ferma, l'altra viene allontanata a velocità costante  $v$  tale che  $h(t) = h_0 + vt \ll a$  a ogni tempo di interesse, così gli effetti di bordo rimangono trascurabili.

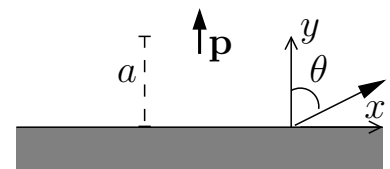


Calcolare

- a) la forza meccanica esercitata sull'armatura in moto (stimandola numericamente per  $h = 1$  mm,  $a = 10$  cm e  $V_0 = 100$  V) e la variazione temporale dell'energia elettrostatica;
- b) il campo magnetico generato tra le armature;
- c) il vettore di Poynting  $\mathbf{S}$  tra le armature e il suo flusso su una superficie cilindrica di raggio  $a$  coassiale al condensatore, confrontando il risultato con la potenza erogata dal generatore.

**2**

Un dipolo elettrico  $\mathbf{p} = p\hat{y}$  è posto sul piano  $xy$  a distanza  $a$  da un piano infinito perfettamente conduttore ad esso perpendicolare.  $y = \pm a/2$ .



a) Si descriva la soluzione per il potenziale elettrostatico usando il metodo delle immagini.

b) Si scriva l'energia potenziale di interazione del dipolo ( $U_d$ ) e la forza tra dipolo e piano, specificandone *almeno* il segno e la dipendenza dalla distanza.

c) Si assuma adesso che il dipolo abbia una dipendenza oscillante dal tempo,  $\mathbf{p} = \text{Re}(\mathbf{p}_0 e^{-i\omega t})$  e si consideri la radiazione emessa sul piano  $xy$  a distanza  $r$  dal dipolo con  $|r| \gg c/\omega$ ,  $|r| \gg a$ . In quale direzione  $\mathbf{n} = (\sin \theta, \cos \theta)$  nel piano  $z = 0$  si hanno massimi di interferenza?

## FORMULE UTILI

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \quad (1)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Campo generato da un dipolo elettrico  $\mathbf{p}$  statico a distanza  $\mathbf{r}$  dal dipolo stesso

$$\mathbf{E}_p = \frac{k_0}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] . \quad (3)$$

Energia potenziale di un dipolo elettrico  $\mathbf{p}$  in presenza di un campo elettrostatico  $\mathbf{E}$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} . \quad (4)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (5)$$

dove  $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

## SOLUZIONI

### 1

a) La capacità del condensatore  $C$  vale

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h_0 + vt}. \quad (6)$$

In ogni caso abbiamo una simmetria cilindrica per rotazioni attorno all'asse del condensatore, che possiamo prendere come asse  $z$ . Nelle nostre approssimazioni il campo elettrico è uniforme e diretto lungo  $z$  tra le armature, trascurabile altrove. Per condensatore mantenuto a differenza di potenziale costante  $V_0$  il campo elettrico vale

$$E = \frac{V_0}{h_0 + vt}. \quad (7)$$

La forza elettrostatica con cui le armature si attraggono vale in modulo  $F = \frac{1}{2}QE$  con  $Q = CV_0$ , quindi

$$F = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2(h_0 + vt)^2} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \pi a^2. \quad (8)$$

La forza meccanica è uguale in modulo a  $F$  e diretta lungo la velocità ovvero lungo  $\hat{\mathbf{z}}$ . Inserendo i valori suggeriti,  $F \simeq 1.35 \times 10^{-3}$  N.

L'energia elettrostatica di un condensatore vale

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2(h_0 + vt)}. \quad (9)$$

I risultati si possono ottenere semplicemente anche senza riferirsi alla capacità: ad esempio l'energia elettrostatica è semplicemente data dal prodotto della densità di energia per il volume del condensatore,

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 (\pi a^2 h(t)), \quad (10)$$

la cui derivata rispetto ad  $h$  fornisce  $-F$ .

b) Possiamo sfruttare la simmetria cilindrica del problema e calcolare la circuitazione di  $\mathbf{B}$  lungo una circonferenza di raggio  $r$  coassiale con il sistema e compresa tra le due armature. Non avendo correnti concatenate, l'equazione di Maxwell  $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}$  fornisce

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad (11)$$

da cui

$$2\pi r B = -\frac{\pi r^2}{c^2} \frac{V_0 v}{(h_0 + vt)^2} \quad \text{ovvero} \quad B = -\frac{r}{2c^2} \frac{V_0 v}{(h_0 + vt)^2}. \quad (12)$$

Per simmetria  $\mathbf{B}$  ha solo la componente azimutale. Il segno meno della (12) ci dice che, se prendiamo l'asse  $z$  concorde con  $\mathbf{E}$ , le linee di forza di  $\mathbf{B}$  sono in senso orario. D'altra parte  $\partial E_z / \partial t$  è negativo, quindi è negativo  $(\nabla \times \mathbf{B})_z$ , e abbiamo quindi

$$0 > (\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right] = \frac{2B_\varphi}{r}, \quad (13)$$

e la componente  $B_\varphi$  è negativa.

**d)** Tra le armature abbiamo sia il campo elettrico uniforme lungo  $z$  dato dalla seconda delle (7) che il campo magnetico azimutale dato dalla (12). Se  $\mathbf{E}$  è diretto come  $\hat{z}$  e  $\mathbf{B}$  quindi come  $-\hat{\varphi}$ , abbiamo che il vettore di Poynting  $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  è diretto come  $\hat{r}$  e ha modulo

$$S = S_r = -\varepsilon_0 c^2 E_z B_\varphi = \frac{\varepsilon_0 V_0^2 v r}{2(h_0 + vt)^3}. \quad (14)$$

Ovviamente il risultato è indipendente dalla polarità del condensatore, in quanto invertendo il segno di  $\mathbf{E}$  si inverte anche quello di  $\mathbf{B}$  e quindi il verso di  $\mathbf{S}$  non cambia. Se consideriamo il flusso di  $\mathbf{S}$  attraverso una superficie laterale cilindrica di raggio  $a$  che racchiude il condensatore, abbiamo

$$\Phi_S = 2\pi a(h_0 + vt) \frac{\varepsilon_0 V_0^2 v a}{2(h_0 + vt)^3} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2 v}{(h_0 + vt)^2}. \quad (15)$$

La carica del condensatore diminuisce nel tempo come  $Q = C(t)V_0 = \varepsilon_0 \pi a^2 V_0 / h(t)$ . Abbiamo quindi una corrente

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0 v}{(h_0 + vt)^2} \quad (16)$$

dove il segno meno indica che il generatore non carica il condensatore, ma è il condensatore a scaricarsi sul generatore. Quindi il generatore non eroga, ma assorbe potenza. La potenza *assorbita* dal generatore vale

$$W_{\text{ass}} = -V_0 I = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2 v}{(h_0 + vt)^2} \quad (17)$$

pari al flusso  $\Phi_S$  della (15). Si può anche notare che  $W_{\text{ass}}$ , e quindi  $\Phi_S$ , sono uguali alla somma della potenza meccanica  $Fv$  e della diminuzione di energia elettrostatica per unità di tempo  $-\partial U / \partial t$ , dove  $F$  è data dalla (8), e  $U$  è data dalla (9).

## 2

**a)** Ponendo un dipolo immagine  $\mathbf{p}$  parallelo al dipolo reale e in posizione simmetrica rispetto al piano (quindi a distanza  $2a$  dal dipolo reale) il potenziale elettrostatico si annulla come richiesto sul piano del conduttore. La configurazione quindi descrive la soluzione unica per il potenziale.

**b)** L'energia di interazione tra due dipoli reali  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  separati di una distanza  $\mathbf{r}_{12}$  si può calcolare come  $U_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1$  dove  $\mathbf{E}_1$  è il campo generato dal dipolo 1:

$$U_{12} = -\mathbf{p}_2 \cdot \left( k_0 \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12})\hat{\mathbf{r}}_{12} - \mathbf{p}_1}{r_{12}^3} \right) = k_0 \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{12}) - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r_{12}^3}. \quad (18)$$

Notare la simmetria  $1 \leftrightarrow 2$ . Posto  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$  e  $\mathbf{r}_{12} = y\hat{\mathbf{y}}$  si ottiene per l'energia di interazione tra dipoli paralleli a distanza  $y$

$$U_{\mathbf{pp}} = -k_0 \frac{2p^2}{y^3}. \quad (19)$$

Da qui si ottiene la forza tra i due dipoli paralleli a distanza  $2a$ ,

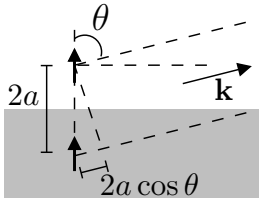
$$\mathbf{F} = -\nabla U_{\mathbf{pp}}|_{y=2a} - k_0 \frac{6p^2}{(2a)^4} \hat{\mathbf{y}} = -k_0 \frac{3p^2}{8a^4} \hat{\mathbf{y}} . \quad (20)$$

Questa è anche la forza esercitata sul dipolo reale in quanto il valore del campo è lo stesso sia che l'altro dipolo sia reale o immagine. La forza è attrattiva, come si può verificare con considerazioni elementari.

L'energia del dipolo è invece la metà di  $U_{\mathbf{pp}}$  essendo uno dei due dipoli immaginario:

$$U_d = \frac{1}{2} U_{\mathbf{pp}}|_{y=2a} = -k_0 \frac{2p^2}{(2a)^3} = -k_0 \frac{p^2}{4a^3} . \quad (21)$$

c)



Il dipolo reale e il dipoli immagine oscillano in fase tra loro. Per radiazione emessa in direzione  $\mathbf{n}$ , ovvero con vettore d'onda  $\mathbf{k} = (\omega/c)\mathbf{n}$ , la differenza di cammino ottico tra i due dipoli adiacenti è  $\Delta\ell = 2a \cos \theta$  come mostrato in figura, e quindi la differenza di fase è  $k\Delta\ell$ . La condizione di interferenza costruttiva è quindi

$$k\Delta\ell = \frac{2\omega a}{c} \cos \theta = 2\pi m , \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

(La condizione  $m = 0$  corrisponderebbe a un'onda che si propaga con  $\mathbf{k}$  parallelo alle pareti). Notiamo che per semplicità abbiamo discusso la radiazione nel piano  $xy$  (come da enunciato), mentre in effetti il problema ha una simmetria cilindrica rispetto a  $\mathbf{p}$ . Gli angoli  $\theta$  che soddisfano la (22) definiscono quindi, in coordinate sferiche rispetto al punto di mezzo tra i dipoli, le direzioni di interferenza costruttiva.