

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (17/07/2023)

1

Un circuito ha forma rettangolare ed è posto verticalmente in presenza del campo di gravità $\mathbf{g}$ e di un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B}_0$ ortogonale al piano del circuito, come in Fig. 1. Il lato inferiore è costituito da una sbarretta di lato a e massa m libera di scorrere senza attrito. La resistenza del circuito è R ed è assunta costante. L'autoinduzione è trascurabile. Determinare

- la corrente I e la potenza dissipata nel circuito in funzione della velocità istantanea v della sbarretta,
- l'equazione del moto della sbarretta e il valore costante di v asintoticamente raggiunto.
- Si dica come cambiano le risposte precedenti se nel circuito si inserisce un generatore di tensione continua V_0 e in particolare si trovi se la sbarretta può fermarsi (dopo essere partita con velocità non nulla).
- Si discuta come va scelta la polarità di V_0 affinché il generatore assorba energia invece di cederla.

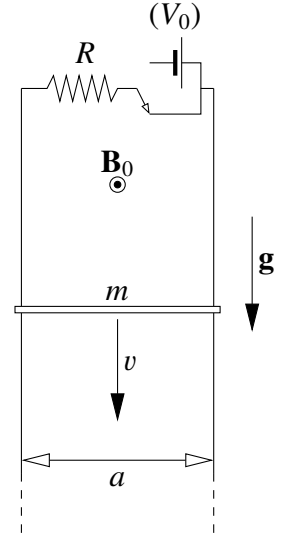


Figura 1:

2

Un pacchetto d'onde di forma approssimativamente parallelepipedale avente ampiezza del campo elettrico E_0 , frequenza ω , durata finita $\tau \gg 2\pi/\omega$ e sezione trasversale A , incide perpendicolarmente sulla superficie di un mezzo semi-infinito con indice di rifrazione reale n (parte alta di Fig. 2, la parte bassa mostra le onde trasmesse e riflesse). Per un pacchetto quasi-monocromatico e quasi-piano le ampiezze

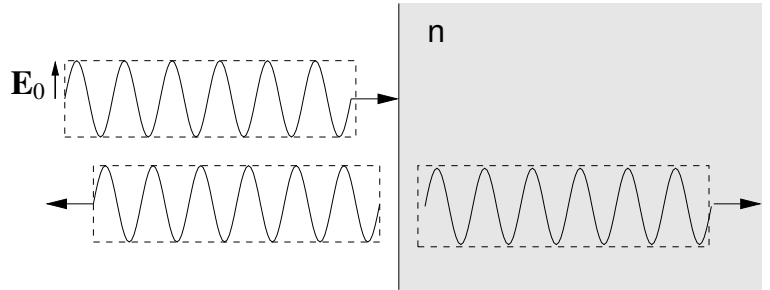


Figura 2:

E_r ed E_t dei pacchetti trasmesso e riflesso sono date dalle formule di Fresnel,

$$E_r = \frac{1-n}{1+n} E_0, \quad E_t = \frac{2n}{1+n} E_0. \quad (1)$$

- Calcolare la lunghezza spaziale e l'ampiezza del campo magnetico del pacchetto trasmesso.
- Calcolare l'energia e la quantità di moto dei pacchetti riflesso e trasmesso e eventualmente cedute al mezzo.
- Dimostrare le (1) nel limite di onde perfettamente monocromatiche e piane.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Definizione di forza elettromotrice (f.e.m.) in un circuito

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{B}) , \quad (3)$$

dove l'integrale di linea è eseguito sul circuito, $\mathbf{V}$ è la velocità locale dell'elemento di circuito e Φ è il flusso del campo magnetico che attraversa il circuito.

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (4)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Teorema di conservazione della quantità di moto

$$[\partial_t(\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i + \partial_j T_{ij} = -[\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}]_i , \quad (5)$$

dove T_{ij} è il tensore degli stress di Maxwell.

SOLUZIONI

1

a) Il flusso del campo magnetico attraverso il circuito vale

$$\Phi = B_0 a x , \quad (6)$$

dove x è la posizione della sbarretta. La forza elettromotrice vale quindi

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 a \dot{x} = -B_0 a v , \quad (7)$$

dove abbiamo posto $v = \dot{x}$ e considerata positiva la velocità diretta verso il basso. Abbiamo quindi per la corrente I che circola nel circuito nel caso generale,

$$RI = \mathcal{E} + V_0 = V_0 - B_0 a v , \quad \text{da cui} \quad I = \frac{V_0 - B_0 a v}{R} , \quad (8)$$

in assenza di pila basta porre $V_0 = 0$. Per la potenza dissipata abbiamo

$$P_d = RI^2 = \frac{(V_0 - B_0 a v)^2}{R} \quad (9)$$

b) La forza magnetica che agisce sulla sbarretta vale

$$F_B = I a B_0 = \frac{a B_0 V_0 - (a B_0)^2 v}{R} , \quad (10)$$

e l'equazione del moto è

$$m \frac{dv}{dt} = mg + F_B = mg + \frac{a B_0 V_0 - (a B_0)^2 v}{R} . \quad (11)$$

Il valore asintotico della velocità comporta $\dot{v} = 0$, quindi abbiamo

$$v_\infty = \frac{Rmg}{(aB_0^2)} + \frac{V_0}{aB_0} . \quad (12)$$

c) Dalla (12) si vede che $v_\infty = 0$ se $V_0 = -Rmg/aB_0$. In questa condizione la forza magnetica esercitata sulla corrente continua bilancia esattamente la forza di gravità. Per questo valore particolare di V_0 la sbarretta inizialmente ferma rimane ferma, se parte con velocità iniziale non nulla si ferma asintoticamente.

d) Potenza assorbita dal generatore

$$P_g = V_0 I \quad (13)$$

La potenza è assorbita se la corrente I entra nel generatore dal polo positivo ed esce dal polo negativo, ovvero gli elettroni entrano dal polo negativo ed escono dal polo positivo, come in Fig. 3. Questo accade se il generatore da solo farebbe girare la corrente in senso antiorario mentre la forza elettromotrice indotta prevale ($|\mathcal{E}| > |V_0|$) e impone la circolazione in senso orario. In questo caso l'energia gravitazionale viene convertita in parte in dissipazione Joule e in parte carica la batteria. Quindi il segno di V_0 deve essere opposto al segno di $\mathcal{E}$ e deve essere $|\mathcal{E}| > |V_0|$. Se $\mathcal{E}$ e V_0 sono concordi la batteria contribuisce alla dissipazione e al rallentamento della sbarretta. Se sono discordi e uguali in modulo non circola corrente e la sbarretta è in caduta libera. Se sono discordi con $|\mathcal{E}| < |V_0|$ La batteria eroga potenza e diminuisce l'effetto di frenata.

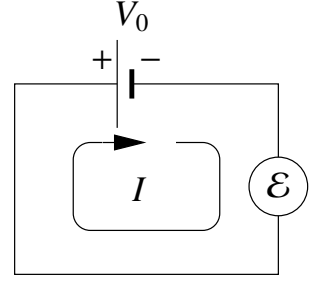


Figura 3:

2

a) Frequenze e durata temporale sono le stesse. La velocità di fase nel mezzo è più piccola di un fattore $1/n$ e quindi l'impulso trasmesso è più corto. L'impulso riflesso ha durata uguale.

b) Energie (a meno di fattori comuni) ottenute integrando sul volume del pacchetto

$$U_i = Ac\tau E_i^2, \quad U_r = A\tau E_r^2 = A\tau \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 E_i^2 \quad (14)$$

considerando che il campo magnetico $B_t = nE_t/c$

$$U_t = A \frac{c\tau}{n} \frac{1+n^2}{2} \frac{4n^2}{(1+n)^2} E_i^2 \quad (15)$$

In generale $U_t \neq U_i - U_r$ da cui si deduce la cessione di energia al mezzo ...

...