

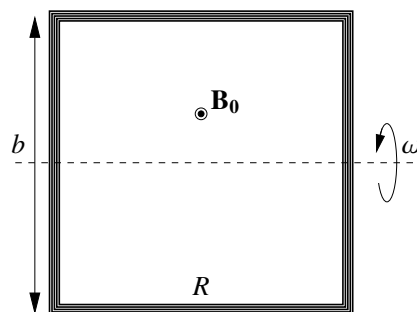
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2025-2026

Compito di Fisica 2 (13/07/2026)

1

L'avvolgimento di un alternatore è schematizzato come N spire di filo conduttore con sezione πa^2 avvolte a forma di quadrato di lato b con $b \gg Na$. La resistenza totale è R . L'avvolgimento è mantenuto in rotazione rispetto a un asse mediano del quadrato con velocità angolare ω perpendicolare a un campo magnetico statico e uniforme $\mathbf{B}_0$.

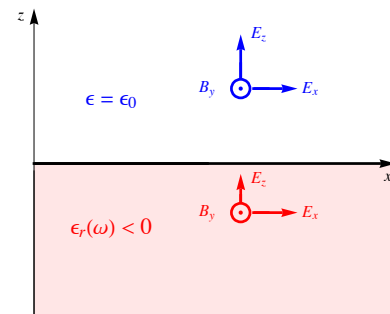


Trascurando inizialmente l'autoinduzione, calcolare:

- a) la corrente indotta e la potenza dissipata nell'avvolgimento, dando sia i valori istantanei che mediati sul periodo;
- b) le forze esercitate dal campo magnetico sui lati dell'avvolgimento e il corrispondente momento meccanico $\mathbf{M}$ rispetto all'asse di rotazione.
- c) Qual è il valore di $\mathbf{M}$ sostituendo l'avvolgimento quadrato con uno circolare avente la stessa area e resistenza?
- d) Assunta ora un'autoinduttanza $L_s \simeq \mu_0 b \ln(b/a)$ per la singola spira, si risponda di nuovo alla domanda **a)** e si dica per quali valori di ω l'autoinduzione è trascurabile se $b = 1 \text{ cm} = 10^2 a$ e la resistività del filo è $\rho \simeq 1.7 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ (rame).

2

Si consideri un'interfaccia piana posta a $z = 0$. La regione superiore ($z > 0$) è occupata dal vuoto, mentre la regione inferiore ($z < 0$) è occupata da un metallo descritto da una permittività dielettrica relativa reale e negativa $\epsilon_r(\omega) < 0$, come può accadere per frequenze minori della frequenza di plasma ω_p . Si assuma $\mu = \mu_0$ in tutto lo spazio. Si consideri il vettore campo magnetico polarizzato parallelamente all'interfaccia, $\vec{B}_v(x, z, t) = (0, B_v(z), 0)e^{i(k_x x - \omega t)}$ per il vuoto ($z > 0$) e $\vec{B}_m(x, z, t) = (0, B_m(z), 0)e^{i(k_x x - \omega t)}$ per il metallo ($z < 0$).



Si vuole verificare se le equazioni di Maxwell ammettano come soluzione un'onda di superficie che si propaga lungo la direzione x e decade esponenzialmente lungo l'asse z

- a) Dimostrare che per avere onde confinate evanescenti la dipendenza da z deve essere del tipo $B_v(z) = C_v e^{-\kappa_v z}$ per $z > 0$ e $B_m(z) = C_m e^{\kappa_m z}$ per $z < 0$. Ricavare le relazioni che legano il vettore d'onda propagante k_x e i coefficienti di decadimento κ_v, κ_m alla frequenza ω .
- b) Ricavare le componenti del campo elettrico $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$ in entrambe le regioni, a partire dalla legge di Ampère-Maxwell.
- c) Imponendo le corrette condizioni al contorno per i campi tangenziali a $z = 0$, dimostrare che $\kappa_v, \kappa_m, \epsilon_r(\omega)$ devono necessariamente essere legate dalla relazione $\kappa_v + \kappa_m / \epsilon_r = 0$, affinché esista

una soluzione fisica non banale con $C_v = C_m \neq 0$. Mostrare che E_z è discontinua attraverso le due regioni, e commentarne il significato fisico.

d) Ricavare la relazione di dispersione $k_x(\omega)$ e discutere perché debba essere necessariamente $\varepsilon_r(\omega) < -1$.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2, \quad k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ m/F}. \quad (1)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x = \mathbf{J}Sd\ell = Id\boldsymbol{\ell}$.

Equazioni d'onda di Helmholtz per i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in mezzo con costante dielettrica relativa $\varepsilon_r(\omega)$:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\varepsilon_r(\omega)}{c^2}\omega^2\right)\mathbf{E} = 0, \quad \left(\nabla^2 + \frac{\varepsilon_r(\omega)}{c^2}\omega^2\right)\mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2}\text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2}|\tilde{A}|^2. \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

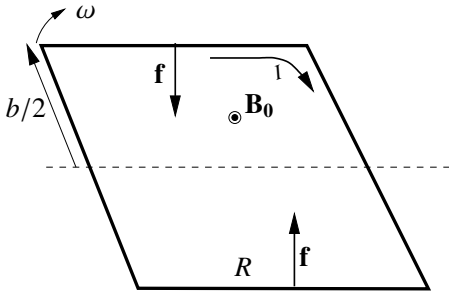
a) La f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E} = RI = -\frac{d}{dt}\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{S} = \omega B_0 b^2 N \sin \omega t \quad (6)$$

La potenza dissipata

$$P_d = RI^2 = \frac{(\omega B_0 b^2 N \sin \omega t)^2}{R} \quad \langle P_d \rangle = \frac{(\omega B_0 b^2 N)^2}{2R} . \quad (7)$$

b)



Le forze sui lati sono rispettivamente

$$\mathbf{F}_{\pm} = \pm N b^2 \mathbf{I} \times \mathbf{B}_0 , \quad (8)$$

con momento $\mathbf{M} = \mathbf{F} \times \mathbf{b}$ ovvero

$$\mathbf{M} = \omega \frac{b^4 B_0^2 N^2 \sin^2 \omega t}{R} . \quad (9)$$

Si ha quindi $P_m = \mathbf{M} \cdot \omega = P_d$ dove P_m è la potenza meccanica esercitata.

c) Dall'eguaglianza $P_m = \mathbf{M} \cdot \omega = P_d$ ed essendo I la stessa per circuiti con stessa area e resistenza, $\mathbf{M}$ ha lo stesso valore per l'avvolgimento circolare.

d) In forma complessa l'equazione del circuito può essere scritta come

$$RI + L \frac{dI}{dt} = -i\omega B_0 b^2 N e^{-i\omega t} , \quad (10)$$

che ha soluzione

$$I = \frac{-i\omega B_0 b^2 N}{R - i\omega L} e^{-i\omega t} . \quad (11)$$

L'autoinduzione è trascurabile se $\omega \ll R/L$. Assumendo una spira circolare di lunghezza $2\pi b$ si ha

$$R \simeq 2\pi N \frac{b}{a^2} \rho , \quad L \simeq N \mu_0 b \ln(b/a) , \quad (12)$$

da cui

$$\frac{R}{L} \simeq 1.7 \times 10^7 / \ln(10^2) \text{ s}^{-1} . \quad (13)$$

Soluzione

2

(a)

Nel vuoto ($z > 0$), l'equazione delle onde per il campo magnetico è:

$$\nabla^2 \vec{B}_v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}_v}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

Applicando l'operatore $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ alla forma d'onda ipotizzata, si ottiene:

$$\left(-k_x^2 + \frac{1}{B_v(z)} \frac{d^2 B_v}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right) B_v(z) = 0 \quad (15)$$

Per avere un'onda confinata sulla superficie, la soluzione per $B_v(z)$ deve tendere a zero per $z \rightarrow +\infty$. Scegliamo quindi la soluzione esponenziale decrescente $B_v(z) = C_v e^{-\kappa_v z}$ con $\kappa_v > 0$. Sostituendo la derivata seconda $\frac{d^2 B_v}{dz^2} = \kappa_v^2 B_v(z)$:

$$-k_x^2 + \kappa_v^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \implies \kappa_v = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (16)$$

Ripetendo il medesimo procedimento nel metallo ($z < 0$), dove la velocità della luce efficace è $v = c/\sqrt{\varepsilon_r}$, e richiedendo che il campo decada per $z \rightarrow -\infty$, scegliamo $B_m(z) = C_m e^{\kappa_m z}$ con $\kappa_m > 0$:

$$-k_x^2 + \kappa_m^2 + \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \implies \kappa_m = \sqrt{k_x^2 - \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}} \quad (17)$$

(b)

Per Ampère-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -i \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_r \vec{E} \quad (18)$$

sviluppando il rotore di $\vec{B}$, le sole componenti non nulle si trovano lungo gli assi x e z :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) \hat{z} \quad (19)$$

Uguagliando le componenti membro a membro, il campo elettrico tangenziale E_x è:

$$E_x = -\frac{ic^2}{\omega \varepsilon_r} \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad (20)$$

Analogamente, per E_z si ottiene:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -i \frac{\omega}{c^2} \varepsilon_r E_z \implies E_z = \frac{ic^2}{\omega \varepsilon_r} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (21)$$

Poiché la dipendenza spaziale lungo la direzione di propagazione x è del tipo $e^{ik_x x}$, si ha:

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = ik_x B_y(x, z, t) \quad (22)$$

Sostituendo nell'equazione di E_z :

$$E_z = \frac{ic^2}{\omega \varepsilon_r} (ik_x B_y) = -\frac{c^2 k_x}{\omega \varepsilon_r} B_y(x, z, t) \quad (23)$$

Esplicitando i campi nelle due regioni di interesse, in definitiva le componenti complete del campo elettrico $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$ risultano:

- Nel vuoto ($z > 0$, $\varepsilon_r = 1$)

$$E_{xv}(z) = -\frac{ic^2\kappa_v}{\omega}C_v e^{-\kappa_v z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (24)$$

$$E_{zv}(z) = -\frac{c^2 k_x}{\omega}C_v e^{-\kappa_v z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (25)$$

- Nel metallo ($z < 0$, $\varepsilon_r = \varepsilon_r$)

$$E_{xm}(z) = \frac{ic^2\kappa_m}{\omega\varepsilon_r}C_m e^{\kappa_m z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (26)$$

$$E_{zm}(z) = -\frac{c^2 k_x}{\omega\varepsilon_r}C_m e^{\kappa_m z} e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (27)$$

(c)

All'interfaccia $z = 0$, le componenti tangenziali di $\vec{B}$ e $\vec{E}$ devono essere continue:

- Continuità di B_y :

$$C_v = C_m \quad (28)$$

- Continuità di E_x :

$$-\kappa_v C_v = \frac{\kappa_m}{\varepsilon_r} C_m \quad (29)$$

Sostituendo la prima condizione ($C_v = C_m$) nella seconda per una soluzione non banale ($C_v \neq 0$), si ottiene la condizione necessaria:

$$\kappa_v + \frac{\kappa_m}{\varepsilon_r(\omega)} = 0 \quad (30)$$

Poiché per definizione deve essere $\kappa_v > 0$ e $\kappa_m > 0$, l'uguaglianza matematica può essere soddisfatta - dato che i coefficienti sono reali - se e solo se la costante dielettrica del mezzo inferiore è negativa: $\varepsilon_r < 0$.

Utilizzando le due condizioni su derivate dalle condizioni al contorno e quanto trovato in (b), si vede che E_x è continua attraverso le due regioni, E_z non lo è. Fisicamente, la discontinuità di E_z tra le due regioni è responsabile dell'accumulo di carica oscillante all'interfaccia, cioè il plasma di elettroni, che sostiene l'onda stessa. Se E_z fosse nullo, non avremmo alcuna oscillazione di carica superficiale, e il plasmone di superficie non potrebbe esistere.

(d)

Dalla relazione precedente:

$$\kappa_v^2 = \frac{\kappa_m^2}{\varepsilon_r^2} \quad (31)$$

E sostituendo le definizioni geometriche di κ_v^2 e κ_m^2 in (a):

$$k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{1}{\varepsilon_r^2} \left(k_x^2 - \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \right) \quad (32)$$

da cui moltiplicando ambo i membri per ε_r^2 :

$$k_x^2(\varepsilon_r^2 - 1) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(\varepsilon_r - 1) \quad (33)$$

ovvero, ricordando che $\varepsilon_r^2 - 1 = (\varepsilon_r - 1)(\varepsilon_r + 1)$:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_r(\omega)}{\varepsilon_r(\omega) + 1}} \quad (34)$$

Affinché l'onda si propaghi lungo l'interfaccia x , il vettore d'onda k_x deve essere una quantità reale, il che implica che l'argomento sotto la radice quadrata deve essere strettamente positivo. Avendo già dimostrato in (c) che deve essere $\varepsilon_r < 0$ (numeratore negativo), affinché la frazione sia positiva il denominatore deve essere anch'esso negativo:

$$\varepsilon_r(\omega) + 1 < 0 \implies \varepsilon_r(\omega) < -1 \quad (35)$$