

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (16/09/2011)

1

Si dimostri che

a)* una sfera di raggio a con densità di polarizzazione $\mathbf{P}$ genera al suo interno un campo elettrico

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}, \quad (1)$$

b)* una sfera dielettrica di raggio a e permittività relativa ε_r in un campo esterno uniforme $\mathbf{E}_0$ acquista una densità di polarizzazione indotta

$$\mathbf{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \quad (2)$$

(nella dimostrazione si può usare il risultato del punto **a**)).

Si consideri ora un'onda elettromagnetica piana, linearmente polarizzata, di intensità I e lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi c/\omega \gg a$ incidente sulla sfera del punto **b**).

c) Descrivere la radiazione diffusa dalla sfera, calcolando la potenza irradiata P , la sezione d'urto di diffusione $\sigma_d = P/I$, e determinando le direzioni (rispetto alla polarizzazione¹ dell'onda incidente) in cui l'intensità della luce irradiata è massima o minima.

d) Se la sfera è metallica e ε_r dipende dalla frequenza secondo la relazione

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} \quad (3)$$

dove ω_p e ν sono costanti e $\nu \ll \omega$, discutere la dipendenza di σ_d dalla frequenza, determinandone il massimo in funzione di ω .

2

Sul piano $x = 0$ è presente una opportuna distribuzione superficiale di carica fissa che genera il potenziale elettrostatico nel sistema del laboratorio S

$$\Phi = \Phi(x, y) = \Phi_0 e^{-q|x|} \cos(ky) \quad (q, k > 0). \quad (4)$$

a)* Dimostrare che $q = k$.

b) Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}$ associato al potenziale (4).

c)* Calcolare la densità di carica superficiale $\sigma = \sigma(y)$.

Si consideri ora un sistema S' in moto con velocità uniforme $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{y}}$ rispetto a S . Calcolare in S'

d) i potenziali scalari $\Phi' = \Phi'(x', y', t')$ e $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(x', y', t')$, specificandone la dipendenza spaziale e temporale,

e) i campi elettrico $\mathbf{E}'$ e magnetico $\mathbf{B}'$.

¹Si avvisa di *non* confondere la “polarizzazione dell'onda” con la “(densità di) polarizzazione della sfera”.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

Le domande asteriscate (*) **non** devono essere svolte da chi sostiene **solo la prova di Fisica B2**. Per queste domande **si tenga eventualmente conto del risultato**, senza doverlo dimostrare, per le domande successive.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi \varepsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (5)$$

Relazione tra densità di polarizzazione $\mathbf{P}$ e densità di carica di polarizzazione

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{\text{pol}}, \quad \rho = \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{lib}}. \quad (6)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (7)$$

Formula di Larmor per la potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (8)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (9)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (10)$$

SOLUZIONI

1

a) Una sfera di raggio a con densità di polarizzazione $\mathbf{P}$ può essere considerata come la sovrapposizione di due sfere uniformemente cariche, ambedue di raggio a , i cui centri sono separati da una distanza infinitesima $\mathbf{h}$ e le cui densità di carica sono, rispettivamente, $+\rho$ e $-\rho$, con $\rho\mathbf{h} = \mathbf{P}$. In qualunque punto all'interno della sfera originaria il campo elettrico dovuto alla polarizzazione $\mathbf{E}_p$ è dato dalla somma vettoriale dei campi generati dalle due sfere cariche. Abbiamo

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-, \quad \text{con} \quad \mathbf{E}^\pm = \pm \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho \mathbf{r}^\pm \quad (11)$$

dove $\mathbf{r}^+$ e $\mathbf{r}^-$ sono, rispettivamente, le distanze del punto in cui si calcola il campo dai centri delle sfere a densità di carica positiva e negativa. Risulta

$$\mathbf{E}_p = -\frac{\mathbf{h}}{3\varepsilon_0} \rho = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (12)$$

b) All'interno della sfera deve essere

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}_{\text{tot}} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}_{\text{tot}} \quad (13)$$

dove $\mathbf{E}_{\text{tot}}$ è la somma del campo applicato esterno $\mathbf{E}_0$ e del campo dovuto alla polarizzazione $\mathbf{E}_p$, dato dalla (12). Abbiamo così

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \left(\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \right) \\ \mathbf{P} &= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}_0 - \frac{(\varepsilon_r - 1)}{3} \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \frac{\varepsilon_r + 2}{3} &= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{P} &= 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \mathbf{E}_0. \end{aligned} \quad (14)$$

c) Sia $\mathbf{E}_i(x, t) = \mathbf{E}_i \Re(e^{i(kx - \omega t)})$ il campo elettrico dell'onda incidente. Poiché $a \ll \lambda$, si può assumere che il campo sia uniforme sull'intero volume della sfera e trascurarne la dipendenza da x , cosicché la sfera si trova in un campo esterno $\mathbf{E}_i(t) = \mathbf{E}_i \cos(\omega t)$. In base al risultato del punto b), la radiazione induce sulla sfera un momento di dipolo pari a:

$$\mathbf{p} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} V \mathbf{E}_i \cos(\omega t). \quad (15)$$

Applichiamo poi la formula di Larmor per la potenza media irradiata da un dipolo oscillante, ottenendo:

$$P_{\text{irr}} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \langle |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \rangle = \frac{4\pi\varepsilon_0}{3c^3} a^6 \omega^4 \left| \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right|^2 |\mathbf{E}_i|^2. \quad (16)$$

Come per ogni dipolo oscillante, l'intensità della radiazione emessa sarà nulla nella direzione di polarizzazione dell'onda incidente e massima nel piano perpendicolare a quella direzione. L'intensità dell'onda incidente, che è nota, vale:

$$I = \langle S_x \rangle = \varepsilon_0 c^2 \langle [\mathbf{E}_i(t) \times \mathbf{B}_i(t)]_x \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |\mathbf{E}_i|^2. \quad (17)$$

La sezione d'urto sarà allora data da:

$$\sigma_d = \frac{8}{3}\pi a^2 \left(\frac{a\omega}{c}\right)^4 N = \frac{8}{3}(2\pi)^4 \pi a^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 N. \quad (18)$$

dove:

$$N \equiv \left| \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right|^2. \quad (19)$$

d) Nell'ipotesi proposta e limitandoci alla dipendenza dalla frequenza, la sezione d'urto è:

$$\sigma_d \propto \omega^4 N(\omega) = \omega^4 \left| \frac{\varepsilon_r(\omega) - 1}{\varepsilon_r(\omega) + 2} \right|^2. \quad (20)$$

Con pochi passaggi algebrici riscriviamo N :

$$N(\omega) = \omega_p^4 \left| \frac{1}{(3\omega^2 - \omega_p^2) + 3i\omega\nu} \right|^2 = \frac{\omega_p^4}{(3\omega^2 - \omega_p^2)^2 + (3\omega\nu)^2}. \quad (21)$$

Ritornando all'espressione della sezione d'urto:

$$\sigma_d \propto \omega^4 \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \left[\left(3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{3\nu}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} = \omega_p^4 \left[\left(3 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{3\nu}{\omega} \right)^2 \right]^{-1} \quad (22)$$

che ha un massimo in $\omega = \omega_p/\sqrt{3}$.

2

a) All'esterno del piano ($x \neq 0$), il potenziale deve soddisfare l'equazione di Poisson, perciò:

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = \Phi(x, y)(q^2 - k^2) = 0 \quad (23)$$

che implica $q = k$.

b) Il campo elettrico è il gradiente negativo del potenziale:

$$\mathbf{E}(x, y) = -\nabla \Phi(x, y) = k\Phi_0 e^{-k|x|} (\text{sgn}(x) \cos(ky), \sin(ky), 0) \quad (24)$$

c) La densità di carica superficiale si ricava dal teorema di Gauss applicato ad un'opportuna superficie cilindrica, di lunghezza trascurabile, posta con l'asse lungo $\hat{\mathbf{x}}$:

$$\sigma(0, y) = \varepsilon_0 (\mathbf{E}_{x \sim 0^+} - \mathbf{E}_{x \sim 0^-})_{\perp} = \varepsilon_0 2k \cos(ky). \quad (25)$$

d) Il quadripotenziale $\mathcal{A}_\mu = (\Phi/c, \mathbf{0})$ in S . Applicando le trasformazioni di Lorentz si trova

$$\Phi' = \mathcal{A}'_0 = \gamma\Phi/c, \quad A'_y = \mathcal{A}'_2 = -\beta\gamma\Phi/c, \quad A'_x = A'_z = 0. \quad (26)$$

In queste espressioni $\Phi = \Phi[x(x', y', t'), y(x', y', t')]$, ovvero Φ va espresso in funzione delle coordinate in S' . Usando le relazioni

$$x = x', \quad y = \gamma(y' + Vt'), \quad (27)$$

si trova alfine

$$\Phi' = \gamma\Phi_0 e^{-k|x'|} \cos[\gamma k(y' + Vt')], \quad A'_y = -\beta\Phi'/c. \quad (28)$$

Il campo elettromagnetico in S' appare quindi come un'onda superficiale con velocità di fase V e frequenza γkV .

e) Applicando direttamente le trasformazioni dei campi elettromagnetici

$$E'_x = \gamma E_x, \quad E'_y = E_y, \quad B'_z = \gamma\beta E_x/c, \quad (29)$$

dove si applica ancora la (27) per ottenere la dipendenza dalle coordinate. In alternativa i campi si possono ottenere dai potenziali ricavati al punto precedente,

$$\mathbf{E}' = -\nabla'\Phi' - \partial'_t \mathbf{A}', \quad \mathbf{B}' = \nabla' \times \mathbf{A}'. \quad (30)$$

Si ricava così

$$E'_x = -\partial'_x \Phi' = k\Phi' \text{sign}(x') = \gamma E_x, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} E'_y &= -\partial'_y \Phi' - \partial'_t A'_y = \gamma\Phi_0 e^{-k|x'|} \left[\gamma k \sin(\gamma k(y' + Vt')) - \frac{\beta}{c} \gamma k V \sin(\gamma k(y' + Vt')) \right] \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) k \Phi_0 e^{-k|x'|} \sin(\gamma k(y' + Vt')) = E_y, \end{aligned} \quad (32)$$

$$B'_z = \partial'_x A'_y = -\beta \partial'_x \Phi' / c = \beta E'_x / c = \beta \gamma E_x / c. \quad (33)$$