

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2011-2012

Compito di Fisica 2 (14/09/2012)

1

Una sfera non conduttrice di raggio a possiede una magnetizzazione uniforme e costante $\mathbf{M}$.

a) Dimostrare che il campo magnetico all'interno della sfera è dato da $\mathbf{B} = 2\mu_0\mathbf{M}/3$.

b) Calcolare il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la porzione della superficie APB della sfera in Fig.a) determinata da due meridiani, separati da un angolo di latitudine $\Delta\phi$, e dall'equatore.

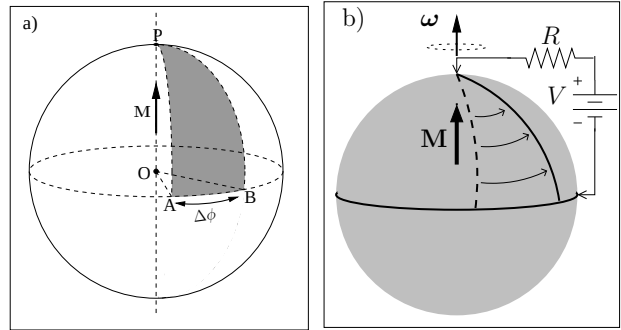
Si costruisce un circuito ponendo strisce conduttrici lungo un meridiano e lungo l'equatore, e chiudendo

il circuito con contatti striscianti che connettono un polo della sfera con l'equatore come in Fig.b). La resistenza del circuito è R e si inserisce un generatore di tensione costante V .

c) Determinare la coppia di forze sulla sfera in funzione della corrente I che scorre nel circuito.

d) Se la sfera è lasciata libera di ruotare liberamente attorno all'asse parallelo a $\mathbf{M}$, si osserva che la sfera raggiunge dopo un certo tempo la velocità angolare costante ω_0 . Si determini il modulo e il verso di ω_0 .

e) Supponendo che il circuito venga chiuso a $t = 0$ e la velocità angolare iniziale della sfera sia nulla, determinare la legge oraria con la quale la sfera raggiunge a regime velocità angolare costante (il momento d'inerzia $\mathcal{I}$ della sfera è noto).



2

In un particolare mezzo dispersivo si osserva che, per un certo intervallo di frequenze, la velocità di gruppo delle onde elettromagnetiche è il doppio della velocità di fase, $v_g = 2v_f$.

a) Determinare la forma generale della relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$.

b) Considerando un'onda piana di ampiezza del campo magnetico B_0 fissata, scrivere in funzione di B_0 e di k (e dei parametri presenti nella relazione di dispersione) le ampiezze del campo elettrico e del vettore di Poynting.

c) Supponendo di osservare che $\omega \ll kc$ nell'intervallo di frequenze in esame, determinare la conducibilità complessa σ del mezzo (definita da $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$) assumendo trascurabile la corrente di spostamento e verificando tale assunzione a posteriori.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) \equiv \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \equiv \nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (3)$$

Campo elettrico interno a una sfera con polarizzazione elettrica uniforme $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (4)$$

SOLUZIONI

1

a) Possiamo sfruttare l'analogia con la sfera con polarizzazione elettrica uniforme $\mathbf{P}$ e campo elettrico interno $\mathbf{E} = -\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$. Da qui $\mathbf{H} = -\mathbf{M}/3$ e quindi $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) = 2\mu_0\mathbf{M}/3$.

b) Il flusso cercato Φ_{APB} si calcola immediatamente notando che, dovendo il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso una superficie chiusa essere nullo, $\Phi_{\text{APB}} = -\Phi_{\text{AOB}}$ dove AOB è il settore circolare il cui vertice O è il centro della sfera. Infatti, il flusso attraverso le superfici laterali POA e POB è nullo essendo il campo $\mathbf{B}$ parallelo a tali superfici. Si ha allora $\Phi_{\text{APB}} = Ba^2\Delta\phi/2$.

Il calcolo dell'integrale sulla superficie porta allo stesso risultato:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{APB}} &= \int_{\text{APB}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int (B \cos \theta) dS = \int_0^{\pi/2} B \cos \theta (a^2 \Delta\phi) \sin \theta d\theta = Ba^2 \Delta\phi \int_0^1 x dx \\ &= Ba^2 \Delta\phi / 2.\end{aligned}\quad (5)$$

c) La coppia, ovvero il momento totale delle forze $\mathbf{m}$, è dato dall'integrale (vedi figura)

$$\mathbf{m} = - \int_C \mathbf{r} \times (\mathbf{B} \times I d\mathbf{l}), \quad (6)$$

dove l'integrale è esteso al tratto di circuito C lungo il meridiano; il contributo a $\mathbf{m}$ del tratto equatoriale è nullo. Essendo $|\mathbf{B} \times d\mathbf{l}| = (B d\ell) \cos \theta$, $d\ell = a d\theta$ e $|\mathbf{r}| = a \sin \theta$ otteniamo

$$\mathbf{m} = \hat{\mathbf{z}} Ba^2 I \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = (Ba^2 I / 2) \hat{\mathbf{z}}. \quad (7)$$

Non abbiamo fatto eccessiva attenzione al segno, che si può determinare osservando che la coppia deve indurre una forza elettromotrice $\mathcal{E}$ tale da cancellare la tensione del generatore. Si può anche osservare che la potenza sviluppata da tale forza elettromotrice deve essere opposta alla potenza meccanica associata alla coppia di forze:

$$\mathcal{E} I = -\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = -m\omega. \quad (8)$$

Supponendo che la sfera si metta in rotazione con velocità angolare $\omega = d(\Delta\phi)/dt$, si ha $\mathcal{E} = -d\Phi_{\text{APB}}/dt = Ba^2\omega/2$ da cui $m = Ba^2 I / 2$, in accordo col calcolo precedente.

d) La sfera ruota a velocità costante quando $\mathbf{m} = 0$ e quindi $I = 0$. In tali condizioni $\mathcal{E} + V = 0$ dove $\mathcal{E}$ è la forza elettromotrice calcolata al punto precedente, quindi ricaviamo

$$\omega_0 = \frac{V}{Ba^2/2}. \quad (9)$$

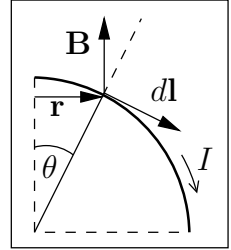
e) L'equazione del moto per $\omega = \omega(t)$ è

$$\mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{Ba^2}{2} I = \frac{Ba^2}{2R} (V + \mathcal{E}) = \frac{Ba^2}{2R} \left(V - \frac{Ba^2}{2} \omega \right), \quad (10)$$

la cui soluzione è

$$\omega(t) = \omega_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = \frac{4RI}{(Ba^2)^2}. \quad (11)$$

Si è trascurata l'autoinduzione del circuito.



2

a) Dalle definizioni $v_f = \omega/k$ e $v_g = d\omega/dk$ otteniamo l'equazione

$$\frac{d\omega}{dk} = 2\frac{\omega}{k}, \quad (12)$$

che si risolve per separazione delle variabili ottenendo $\omega = \alpha k^2$ con α reale e positivo. (La relazione di dispersione delle cosiddette onde di *whistler* o *helicon* in un mezzo conduttore immerso in un campo magnetico ha questa forma.)

b) Dall'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ si ottiene per i moduli $\omega B_0 = k E_0$ ovvero

$$E_0 = \frac{\omega}{k} B_0 = v_f B_0 = \alpha k B_0, \quad (13)$$

da cui

$$|\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \varepsilon_0 c^2 \alpha k B_0^2. \quad (14)$$

c) Nelle ipotesi date $\nabla \times \mathbf{B} \simeq \mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \sigma \mathbf{E}$ da cui, per i moduli

$$ik B_0 = \mu_0 \sigma E_0 = \mu_0 \sigma \alpha k B_0, \quad (15)$$

da cui si ricava $\sigma = i/(\mu_0 \alpha)$.

La condizione $\mu_0 \sigma \mathbf{E} \gg \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ equivale a

$$\frac{1}{\mu_0 \alpha} E_0 \gg \varepsilon_0 \omega E_0, \quad (16)$$

da cui

$$\alpha = \frac{\omega}{k^2} \ll \frac{c^2}{\omega} \quad (17)$$

che è consistente con l'ipotesi di partenza.