

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2012-2013

Compito di Fisica 2 (13/09/2013)

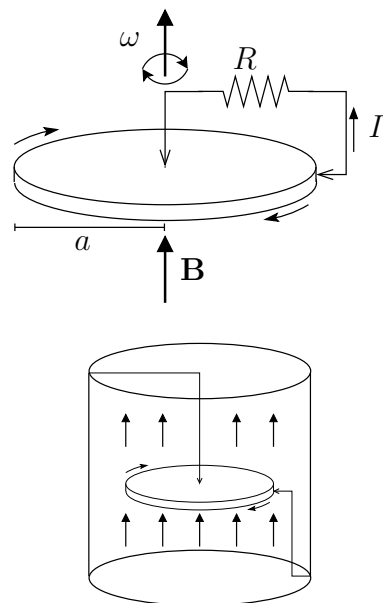
1

Un disco perfettamente conduttore di raggio a e spessore $h \ll a$ è mantenuto in rotazione con velocità angolare costante ω , in presenza di un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B}$ parallelo a ω .

a) Si calcoli il campo elettrico $\mathbf{E}$ generato nel disco in condizioni stazionarie e la corrispondente differenza di potenziale V tra centro e bordo del disco tenendo conto che la forza totale sui portatori di carica deve essere nulla.

b) Mediante contatti striscianti si realizza un circuito chiuso e non rotante fra centro e bordo del disco (vedi figura in alto). Sia R la resistenza del circuito esterno nel quale quindi scorre la corrente $I = V/R$. Si calcoli il momento delle forze esterne necessario a mantenere il disco in rotazione con velocità angolare costante.

c) Si assuma che il circuito esterno del punto b) sia connesso ad un solenoide esterno al disco (vedi in figura in basso), avente n spire per unità di lunghezza, e che tale solenoide fornisca il campo $\mathbf{B}$. Si determini una condizione su ω affinché la corrente possa scorrere in uno stato stazionario senza necessità di altri generatori elettrici che alimentino il solenoide.



2

Per la propagazione di onde elettromagnetiche (EM) trasversali nella ionosfera in presenza del campo magnetico terrestre esiste una regione di frequenze (estesa intorno a una frequenza di riferimento ω_0) nella quale $v_g = 2v_p$, ossia la velocità di gruppo $v_g = v_g(\omega)$ è il doppio della velocità di fase $v_p = v_p(\omega)$. Nel seguito ci si riferisca sempre a questa regione spettrale ovvero a frequenze sufficientemente prossime a ω_0 .

a) Si scriva la relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ delle onde EM in funzione dei parametri $v_{p0} = v_p(\omega_0)$ e ω_0 .

b) Si scrivano v_p e v_g in funzione di ω e si dia l'espressione dell'intensità di onde piane monocromatiche (definita dal valor medio del vettore di Poynting $S = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$) in funzione di ω e dell'ampiezza del campo elettrico E_0 oltre che di v_{p0} e ω_0 .

c) Assumendo che la corrente di spostamento sia trascurabile rispetto alla corrente materiale ($\mathbf{J} \gg \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$) si scriva la conducibilità del mezzo $\sigma = \sigma(\omega)$ (definita per campi monocromatici in notazione complessa da $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$) in funzione di v_{p0} e ω_0 . Si verifichi a posteriori che la corrente di spostamento è trascurabile se $v_p \ll c$.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (2)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J} d^3x = \mathbf{J} S d\boldsymbol{\ell} = I d\boldsymbol{\ell}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (4)$$

SOLUZIONI

1

a) Tra il centro ($r = 0$) e il bordo ($r = a$) del disco esiste una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \int \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^a \omega r B dr = \omega B a^2 / 2 , \quad (5)$$

essendo $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Alternativamente si può pensare che nel disco deve generarsi un campo elettrostatico $\mathbf{E}$ tale che $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ e che quindi si abbia una differenza di potenziale $V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ che porta a $V = \mathcal{E}$.

b) Per effetto Joule nel circuito si dissipa una potenza $P_d = V^2/R$. In condizioni stazionarie P_d deve essere bilanciata dalla potenza meccanica, $P_d = P_m = M\omega$, da cui $M_{\text{ext}} = V^2/(R\omega) = \omega(Ba^2/2)^2/R$.

Alternativamente si può calcolare direttamente il momento delle forze magnetiche esercitate da $\mathbf{B}$ sulle correnti che scorrono nel disco. In stato stazionario e assumendo simmetria cilindrica deve essere $J_r = I/(2\pi r h)$ affinché $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Il momento delle forze magnetiche esercitato su un elemento di volume $dV = 2\pi r h dr$ è $d\mathbf{M}_m = \mathbf{r} \times [\mathbf{J} \times \mathbf{B}]dV = -\hat{\mathbf{z}} I B r dr$, per cui il momento delle forze esterne risulta uguale a

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{M}_m = \hat{\mathbf{z}} I B \int_0^a r dr = I \frac{B a^2}{2} = \omega \frac{(B a^2 / 2)^2}{R} . \quad (6)$$

c) Se il disco rotante fa da generatore per la corrente e quindi per il campo magnetico, si deve avere

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n V / R = \mu_0 n (\omega B a^2 / 2 R) , \quad (7)$$

da cui, indipendentemente dal valore di B , si ricava $\omega = 2R/(\mu_0 n a^2)$. Questo è un modello elementare per dinamo “autosostenute” dalla rotazione (e.g. generazione del campo magnetico terrestre).

2

a) Ricaviamo la relazione di dispersione a partire dall'equazione che lega velocità di gruppo e di fase per la regione di frequenze considerata

$$v_g = 2v_p \quad \text{che dà} \quad \frac{d\omega}{dk} = 2 \frac{\omega}{k} . \quad (8)$$

Integrando la precedente per frequenze prossime a ω_0

$$\omega = \omega_0 \frac{k^2}{k_0^2} = \frac{v_{p0}^2 k^2}{\omega_0} \quad (9)$$

dove $k_0 = \omega_0/v_{p0}$.

b) Dalla relazione di dispersione (9) ricaviamo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2k \frac{\omega_0}{k_0^2} = 2v_{p0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} , \quad v_p = v_g/2 = v_{p0} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{1/2} . \quad (10)$$

Dall'equazione di Faraday-Neumann $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, ricaviamo la relazione tra le ampiezze dei campi per onde piane monocromatiche: $B_0 = E_0/v_p$. L'intensità è data dal valor medio del vettore di Poynting

$$I = \langle \mathbf{S} \rangle = \alpha \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{v_p} = \alpha \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{v_{p0}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{-1/2} \quad (11)$$

dove α è un fattore numerico dipendente dalla polarizzazione dell'onda e abbiamo utilizzato l'espressione della velocità di fase ora determinata.

c) Dall'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ in cui trascuriamo il termine di corrente di spostamento ricaviamo

$$ikB_0 = \mu_0 \sigma E_0 = \mu_0 \sigma v_p B_0 \quad \text{che dà} \quad \sigma = \frac{ik}{\mu_0 v_p} = \frac{ik^2}{\mu_0 \omega} = \frac{i\omega_0}{\mu_0 v_{p0}^2}, \quad (12)$$

ossia la conducibilità è indipendente da ω nella regione studiata. Nell'ultima eguaglianza abbiamo utilizzato la relazione di dispersione.

Confrontando i termini di corrente materiale e di corrente di spostamento otteniamo

$$\sigma E : \varepsilon_0 \partial_t E :: \frac{\omega_0}{\mu_0 v_{p0}^2} : \varepsilon_0 \omega. \quad (13)$$

Posto $\omega \simeq \omega_0$, la precedente diventa

$$\sigma E : \varepsilon_0 \partial_t E :: v_{p0}^{-2} : \varepsilon_0 \mu_0 :: c^2 : v_{p0}^2, \quad (14)$$

che conferma l'assunzione di corrente di spostamento trascurabile se $v_{p0} \ll c$.