

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (15/09/2014)

1

Il positronio è formato da un elettrone e un positrone (aventi stessa massa m_e e carica $\pm e$ rispettivamente) rotanti su un'orbita circolare di raggio R attorno al centro di massa.

a) Calcolare la frequenza ω con cui l'orbita viene percorsa, in funzione del raggio R , e l'energia totale U del positronio.

Per effetto dell'irraggiamento, elettrone e positrone perderanno energia e spiraleranno collassando l'uno sull'altro. Supponendo che l'orbita rimanga quasi circolare e che la perdita di energia per ogni periodo sia piccola rispetto all'energia totale (approssimazione adiabatica), calcolare

b) l'energia irraggiata P_r in funzione del raggio istantaneo dell'orbita $R = R(t)$, e

c) la legge temporale con cui decade $R(t)$ attraverso l'equazione $dU/dt = -P_r$.

2

Nel riferimento del laboratorio S esiste un campo magnetico statico e disomogeneo $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} \cos(kx)$.

a) Calcolare la densità di corrente associata al campo $\mathbf{B}$.

Una particella di carica q si muove in S lungo l'asse x con velocità $\mathbf{V} = \beta c \hat{\mathbf{x}}$ (si assuma che i campi siano abbastanza deboli da far sì che V_x rimanga approssimativamente costante).

b) Calcolare i campi elettrico e magnetico e le densità di carica e corrente nel riferimento S' in cui la particella è ferma.

c) Si osserva che la particella emette in S' radiazione elettromagnetica monocromatica: spiegarne l'origine e determinarne la frequenza.

d) Determinare in S la frequenza della radiazione emessa dalla particella in direzione parallela o antiparallela al suo moto.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (2)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (3)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (4)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (5)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Ciascuna particella si muove di moto circolare uniforme per effetto dell'attrazione coulombiana. Il bilancio delle forze lungo il raggio dà

$$m_e R \omega^2 = \frac{k_0 e^2}{(2R)^2}, \quad (7)$$

da cui ricaviamo la velocità angolare di rotazione

$$\omega = \left(\frac{k_0 e^2}{4m_e R^3} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

L'energia totale è data dalla somma dei contributi cinetici delle due particelle e dell'energia potenziale di una coppia di cariche opposte, situate a distanza $2R$. Per quanto ora trovato

$$U = 2 \frac{m_e}{2} (R\omega)^2 - \frac{k_0 e^2}{2R} = -\frac{k_0 e^2}{4R}. \quad (9)$$

b) Il momento di dipolo elettrico del sistema è $\mathbf{p} = 2e\mathbf{R}$ e la potenza irradiata è data da $P_r = (2k_0/3c^3)|\dot{\mathbf{p}}|^2$. Poiché per un'orbita circolare risulta $\ddot{\mathbf{R}} = -\omega^2\mathbf{R}$, si ha

$$P_r = \frac{2k_0}{3c^3} e^2 \omega^4 (2R)^2 = \frac{1}{6} \frac{k_0^3 e^6}{m_e^2 c^3 R^4}. \quad (10)$$

c) L'equazione $dU/dt = -P_r$ dà

$$\frac{1}{4R^2} \frac{dR}{dt} = -\frac{c}{6R^4} \left(\frac{k_0 e^2}{m_e c^2} \right)^2 \quad (11)$$

ovvero, ricordando che $r_c = k_0 e^2 / (m_e c^2)$ è il raggio classico dell'elettrone,

$$3R^2 \frac{dR}{dt} = \frac{dR^3}{dt} = -2r_c^2 c, \quad (12)$$

la cui soluzione è

$$R(t) = [R^3(0) - 2r_c^2 ct]^{1/3}. \quad (13)$$

2

a) Poiché il campo magnetico ha soltanto la componente lungo $\hat{\mathbf{z}}$, e questa dipende soltanto da x , la legge di Ampère dà per la densità di corrente

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_x B_z(x) \hat{\mathbf{y}} = \frac{k}{\mu_0} B_0 \hat{\mathbf{y}} \sin(kx). \quad (14)$$

b) Nel riferimento S , $\mathbf{E}$ è nullo e $\mathbf{B}$ ha soltanto la componente lungo $\hat{\mathbf{z}}$. Perciò le trasformazioni di Lorentz dei campi elettrico e magnetico da S a S' danno per un boost in direzione $\hat{\mathbf{x}}$

$$B'_x = B'_y = 0, \quad B'_z = \gamma B_z[x(x', t')] = \gamma B_0 \cos(k\gamma(x' + Vt')); \quad (15)$$

$$E'_x = E'_z = 0, \quad E'_y = -\gamma V B_z[x(x', t')] = -\gamma V B_0 \cos(k\gamma(x' + Vt')), \quad (16)$$

Per quanto riguarda le densità di carica e di corrente, le relative trasformazioni danno

$$J'_x = J'_z = 0, \quad J'_y(x', t') = J_y[x(x', t')], \quad \rho' = \rho = 0 . \quad (17)$$

c) Nel riferimento S' il campo elettrico fa oscillare la carica in direzione $\hat{\mathbf{y}}$ a frequenza $\omega' = k\gamma V = kc\gamma\beta$ emettendo radiazione di dipolo della stessa frequenza (per la scelta del riferimento, in S' la velocità della carica è nulla all'ordine più basso così che il termine di forza magnetica è trascurabile).

d) Antitrasformando nel riferimento S , le frequenze della radiazione emessa in avanti (+) e indietro (-) sono date da

$$\omega_{\pm} = \gamma(1 \pm \beta)\omega' = \gamma(1 \pm \beta)k\gamma V = kc\gamma^2\beta(1 \pm \beta) . \quad (18)$$