

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2014-2015

Compito di Fisica 2 (14/09/2015)

1

Si consideri un elettrone descritto dall'equazione del moto (non-relativistica)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nu \mathbf{v}, \quad (1)$$

nel campo di un'onda piana monocromatica e polarizzata linearmente

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t) = \text{Re} [\mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}], \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(kx - \omega t) = \text{Re} [\mathbf{B}_0 e^{i(kx - \omega t)}], \quad (2)$$

dove $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{B}_0 = (E_0/c) \hat{\mathbf{z}}$.

Si trascuri inizialmente il termine $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Con questa assunzione si calcoli

- a) la soluzione per $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ e la potenza dissipata in media sul periodo $P_d = \langle -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle$ (5 punti),
- b) l'energia irraggiata in media per periodo P_r , determinando poi un'espressione per lo smorzamento ν a partire dall'eguaglianza $P_d = P_r$ (5 punti).
- c) Si usi ora la soluzione $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ del punto a) per valutare la forza media

$$\mathbf{f} = \langle -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle, \quad (3)$$

e calcolare il rapporto $|\mathbf{f}|/P_r$ (5 punti).

- d) Dire come cambiano le espressioni per P_d , P_r e $\mathbf{f}$ se invece di un elettrone singolo si considera una nanosfera metallica di raggio $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ contenente N elettroni, trascurando gli effetti di polarizzazione ovvero assumendo che il campo interno alla nanosfera sia $\mathbf{E}_i \simeq \mathbf{E}_0$ (facoltativo: si tenga conto degli effetti di polarizzazione ovvero di un'espressione più accurata per $\mathbf{E}_i$) (5+3 punti).

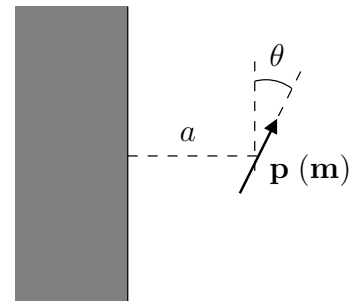
2

Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è posto a distanza a da un piano conduttore infinito. La direzione del dipolo forma un angolo θ con la parallela al piano.

- a) Si descriva la soluzione del problema del potenziale elettrostatico e si determini se la forza tra dipolo e piano è attrattiva o repulsiva. (7 punti)

- b) Si consideri adesso il caso di un dipolo magnetico $\mathbf{m}$, orientato rispetto al piano come il dipolo in a). Si descriva la soluzione per il campo magnetico e si dia il segno della forza tra dipolo e piano nei due limiti in cui il materiale del piano ha permittività magnetica $\mu_r = 0$ e $\mu_r = \infty$ rispettivamente. (8 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.



FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (4)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε senza cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (5)$$

Equazioni della magnetostatica di un mezzo materiale lineare con permittività magnetica μ senza correnti libere

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (6)$$

Campo generato da un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ statico

$$\mathbf{E}_p = \frac{k_0}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] . \quad (7)$$

Energia potenziale di un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ in presenza di un campo elettrostatico $\mathbf{E}$

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} . \quad (8)$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (9)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (10)$$

SOLUZIONI

1

a) Usando il formalismo complesso, cerchiamo una soluzione $\mathbf{v} = \text{Re}(\mathbf{v}_0 e^{i(kx - \omega t)})$. In assenza del campo magnetico l'elettrone non si muove lungo $\hat{\mathbf{x}}$ per cui possiamo prendere x costante. Sostituendo nell'equazione del moto otteniamo

$$-i\omega \mathbf{v}_0 = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 - \nu \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0 = -\frac{ie\mathbf{E}_0}{m_e(\omega + i\nu)}. \quad (11)$$

La potenza dissipata è data da

$$P_d = \langle -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}[-e\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*] = \frac{e^2 |E_0|^2}{2m_e} \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2}, \quad (12)$$

dove si è usato $(\omega + i\nu)^{-1} = (\omega - i\nu)(\omega^2 + \nu^2)^{-1}$.

b) La potenza irradiata mediata sul periodo è

$$P_r = \left\langle \frac{2k_0}{3c^3} |\dot{\mathbf{r}}|^2 \right\rangle = \frac{k_0 e^2}{3c^3} |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{k_0 e^4 |E_0|^2}{3m_e^2 c^3} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (13)$$

Posto $P_r = P_d$ si ha

$$\nu = \frac{2k_0 e^2 \omega^2}{3m_e c^3} = \frac{2r_c \omega^2}{3c}. \quad (14)$$

c) La forza media lungo la direzione di propagazione dell'onda ($\hat{\mathbf{x}}$) è data, nell'approssimazione indicata, da

$$\mathbf{f} \simeq \frac{1}{2} \text{Re}(-e\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}^*) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{ie^2 E_0}{m_e(\omega + i\nu)} \frac{E_0^*}{c} \right] \hat{\mathbf{x}} = \frac{e^2 |E_0|^2}{2m_e c} \frac{\nu}{\omega^2 + \nu^2} \hat{\mathbf{x}} = \frac{P_d}{c} \hat{\mathbf{x}}. \quad (15)$$

d) Trascurando gli effetti di polarizzazione, la potenza dissipata viene moltiplicata per il numero N di elettroni indipendenti: $P_d \rightarrow NP_d$. Invece, poiché l'irraggiamento è coerente essendo le dimensioni della sfera $a \ll \lambda$, la potenza irradiata $P_r \rightarrow N^2 P_r$. Segue che $\nu \rightarrow N\nu$ e $f_x \rightarrow Nf_x$.

Gli effetti di polarizzazione possono essere descritti sostituendo ad $\mathbf{E}_0$ il campo interno $\mathbf{E}_i$ dato da

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r(\omega) + 2}, \quad (16)$$

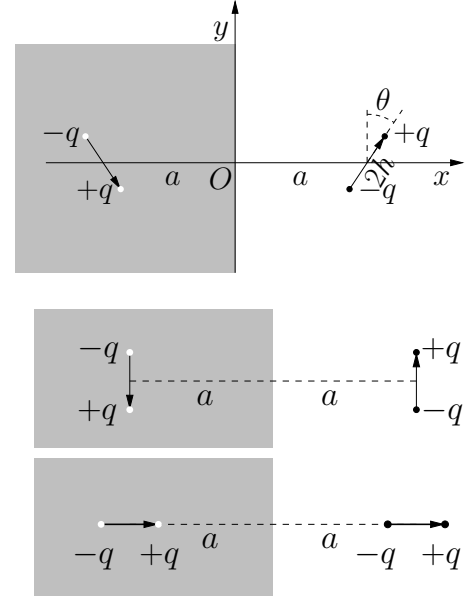
dove per un metallo si può prendere

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \quad (17)$$

Questo dà una dipendenza addizionale dalla frequenza con possibilità di risonanze quando $\omega \simeq \omega_p/\sqrt{3}$.

2

a) Il dipolo può essere trattato come il limite di una coppia di cariche $+q$ e $-q$ a una distanza $2h$ tra loro, per $q \rightarrow \infty$ e $h \rightarrow 0$ con $2hq$ costante pari a $2hq = p$. La carica $+q$, posta in $x = a + h \sin \theta, y = h \cos \theta$, dà origine a una carica immagine $-q$ posta in $x = -a - h \sin \theta, y = h \cos \theta$, posizione simmetrica nel semispazio di sinistra, mentre la carica $-q$, posta in $x = a - h \sin \theta, y = -h \cos \theta$, dà origine a una carica immagine $+q$ posta in $x = -a + h \sin \theta, y = -h \cos \theta$, come in figura. Il potenziale nel semispazio di sinistra è nullo, mentre nel semispazio di destra è quello generato dalle due cariche reali più le due cariche immagine. Al limite, il sistema di cariche tende a un dipolo reale posto in $x = a$, con componenti $p_x = p \sin \theta$ e $p_y = p \cos \theta$, e un dipolo immagine posto in $x = -a$, con componenti $p'_x = p \sin \theta$ e $p'_y = -p \cos \theta$. Questo può anche essere visto considerando il dipolo reale come somma vettoriale di un dipolo parallelo alla superficie conduttrice, che ha come immagine un dipolo antiparallelo a sé stesso, e un dipolo perpendicolare alla superficie, che ha come immagine un dipolo parallelo a sé stesso. Il campo elettrico generato dal dipolo immagine sul dipolo reale è



$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}'}{r^3} \right] \quad (18)$$

con $r = 2a$, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$, per cui l'energia del dipolo reale nel campo del dipolo immagine è

$$\begin{aligned} U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}' &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}' \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^3} - \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}}{r^3} \right] \\ &= -\frac{3p^2 \sin^2 \theta - p^2 \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 + \sin^2 \theta) . \end{aligned} \quad (19)$$

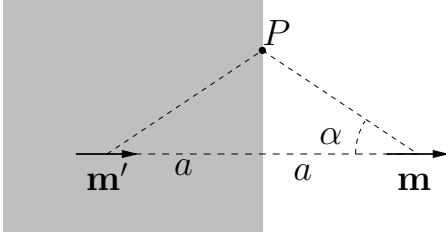
La forza è data da

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} (1 + \sin^2 \theta) < 0 , \quad (20)$$

ed è quindi attrattiva.

b) Conviene considerare il dipolo magnetico $\mathbf{m}$ come somma di due dipoli magnetici, $\mathbf{m}_{\parallel}$ parallelo alla superficie di separazione tra vuoto e mezzo magnetico, e $\mathbf{m}_{\perp}$ perpendicolare alla superficie stessa. Per tutti e due i casi limite facciamo l'ipotesi che il campo nel semispazio vuoto sia lo stesso che avremmo in presenza, oltre che del dipolo reale $\mathbf{m}$, di un dipolo immagine $\mathbf{m}'$, posto nel mezzo magnetico in posizione simmetrica rispetto a $\mathbf{m}$, parallelo con verso concorde rispetto a $\mathbf{m}$, ma con il valore di m' da determinare, eventualmente negativo. Nel caso limite $\mu_r \rightarrow \infty$ (materiale perfettamente paramagnetico), nel vuoto alla superficie di separazione con il mezzo magnetico la componente parallela del vettore ausiliare $\mathbf{H}$ deve essere nulla, altrimenti divergerebbe $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$ all'interno del materiale. Quindi dobbiamo avere $\mathbf{B}$ perpendicolare alla superficie. Il caso è analogo a quello elettrostatico appena trattato. Il campo magnetico generato da un dipolo $\mathbf{m}$ vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right] \quad (21)$$



La componente parallela al piano del campo generato dal dipolo reale $\mathbf{m}_\perp$ nel punto P è

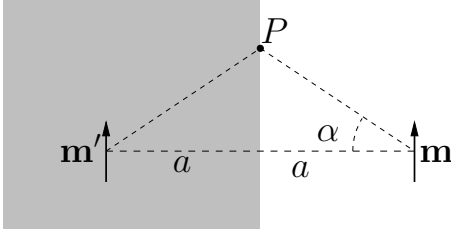
$$B_\parallel = \frac{\mu_0 m_\perp}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (-3 \cos \alpha \sin \alpha) \quad (22)$$

mentre quella generata dal dipolo immagine $\mathbf{m}'_\perp$ è

$$B'_\parallel = \frac{\mu_0 m'_\perp}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (3 \cos \alpha \sin \alpha), \quad (23)$$

infatti abbiamo $\mathbf{m}_\perp \cdot \hat{\mathbf{r}} = -m_\perp \cos \alpha$ e $\mathbf{m}'_\perp \cdot \hat{\mathbf{r}} = m'_\perp \cos \alpha$, quindi porre $\mathbf{m}_\perp = \mathbf{m}'_\perp$ porta a $B_\parallel + B'_\parallel = 0$.

Per quel che riguarda il caso del dipolo parallelo alla superficie di separazione, abbiamo invece per la componente di $\mathbf{B}$ generata dal dipolo reale parallela alla superficie



$$B_\parallel = \frac{\mu_0 m_\parallel}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (3 \sin^2 \alpha - 1), \quad (24)$$

mentre la componente parallela generata da $\mathbf{m}'$ vale

$$B'_\parallel = \frac{\mu_0 m'_\parallel}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (3 \sin^2 \alpha - 1), \quad (25)$$

infatti questa volta abbiamo $\mathbf{m}_\parallel \cdot \hat{\mathbf{r}} = m_\parallel \sin \alpha$ e $\mathbf{m}'_\parallel \cdot \hat{\mathbf{r}} = m'_\parallel \sin \alpha$, quindi otteniamo $B_\parallel + B'_\parallel = 0$ ponendo $\mathbf{m}'_\parallel = -\mathbf{m}_\parallel$. Tutto in analogia con il caso elettrostatico trattato al punto a).

Consideriamo adesso il caso $\mu_r = 0$, cioè il caso del materiale perfettamente diamagnetico, o superconduttore. Questa volta abbiamo $\mathbf{B} \equiv 0$ all'interno del mezzo, quindi, per la continuità di $B_\perp$, nel vuoto vicino alla superficie di separazione $\mathbf{B}$ dovrà essere parallelo alla superficie stessa. Consideriamo prima il caso del dipolo reale $\mathbf{m}_\perp$ perpendicolare alla superficie. Dalla (21) abbiamo per la componente del campo generato da $\mathbf{m}_\perp$ perpendicolare alla superficie

$$B_\perp = \frac{\mu_0 m_\perp}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (3 \cos^2 \alpha - 1), \quad (26)$$

mentre la componente parallela generata da $\mathbf{m}'_\perp$ vale

$$B'_\perp = \frac{\mu_0 m'_\perp}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (3 \cos^2 \alpha - 1), \quad (27)$$

e la condizione $B_\perp + B'_\perp = 0$ richiede che sia $\mathbf{m}'_\perp = -\mathbf{m}_\perp$. Nel caso di $\mathbf{m}$ parallelo alla superficie abbiamo

$$B_\perp = \frac{\mu_0 m_\parallel}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (-3 \cos \alpha \sin \alpha), \quad (28)$$

mentre la componente parallela generata da $\mathbf{m}'$ vale

$$B'_\perp = \frac{\mu_0 m'_\parallel}{4\pi} \frac{\cos^3 \alpha}{a^3} (3 \cos \alpha \sin \alpha), \quad (29)$$

e la condizione $B_\perp + B'_\perp = 0$ richiede che sia $\mathbf{m}'_\parallel = \mathbf{m}_\parallel$.

Vediamo infine il calcolo esplicito della forza (notare che le espressioni saranno comunque analoghe a quelle del caso elettrostatico, vista la forma analoga dell'energia potenziale meccanica). La forza tra due dipoli magnetici $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}'$ posti a distanza $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}}$ ha l'espressione generale

$$\mathbf{F} = -\nabla \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi R^3} [\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}' - 3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{m}' \cdot \mathbf{R})] \right\} . \quad (30)$$

Nella situazione studiata, $\mathbf{R} = 2a\hat{\mathbf{x}}$ e $m = m'$ e il dipolo reale $\mathbf{m}$ forma un angolo $\pi/2 - \theta$ con la direzione $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{x}}$, normale al semipiano.

Nel caso $\mu_r \rightarrow \infty$ il dipolo immagine forma un angolo $\pi/2 - \theta$ con $\hat{\mathbf{x}}$. Tra loro i due dipoli formano un angolo $\pi - 2\theta$. Il calcolo della forza dà allora

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{3\mu_0}{4\pi(2a)^4} mm' [\cos(\pi - 2\theta) - 3\cos^2(\pi/2 - \theta)] \\ &= \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi(2a)^4} [-\cos(2\theta) - 3\sin^2(\theta)] \\ &= -\frac{3\mu_0 m^2}{64\pi a^4} (1 + \sin^2 \theta) < 0 \end{aligned} \quad (31)$$

ossia la forza è attrattiva.

Nel caso $\mu_r = 0$ il dipolo immagine forma un angolo $\pi/2 + \theta$ con $\hat{\mathbf{x}}$. Tra loro i due dipoli formano un angolo 2θ . Il calcolo della forza dà allora

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{3\mu_0}{4\pi(2a)^4} mm' [\cos(2\theta) - 3\cos(\pi/2 - \theta)\cos(\pi/2 + \theta)] \\ &= \frac{3\mu_0 m^2}{4\pi(2a)^4} [1 - 2\sin^2(\theta) + 3\sin^2(\theta)] \\ &= \frac{3\mu_0 m^2}{64\pi a^4} (1 + \sin^2 \theta) > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

ossia la forza è repulsiva.