

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (14/09/2016)

1

Un elettrone è in presenza di un campo magnetico disomogeneo e statico avente simmetria cilindrica. L'elettrone percorre un'orbita circolare di raggio a sul piano $z = 0$ sul quale $\mathbf{B}(r, z = 0) = B_z(r)\hat{\mathbf{z}}$ dove $B_z(r)$ è una funzione nota.

a) Calcolare la velocità e la frequenza con le quali viene percorsa l'orbita.

A partire da $t = 0$ il campo magnetico viene variato nel tempo, lentamente rispetto al periodo dell'orbita, secondo la legge $B_z(r, t) = B_z(r)f(t)\hat{\mathbf{z}}$ dove $f(t)$ è nota ed $f(0) = 1$.

b) Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}(r, z = 0, t)$ indotto sul piano dell'orbita in funzione di $B_z(r)$, $f(t)$ e delle loro derivate.

c) Mostrare che se vale la condizione $B_z(a) = \overline{B_z}(a)/2$ dove

$$\overline{B_z}(a) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a B_z(r) 2\pi r dr \quad (1)$$

è il valore mediato del campo magnetico sul cerchio di raggio a e si trascura l'irraggiamento, allora un elettrone che si trovi a $r = a$ per $t = 0$ permane sull'orbita di raggio a per $t > 0$ e indipendentemente dalla forma di $f(t)$.

d) Calcolare la potenza irradiata per il moto del punto c), tenendo conto dell'effetto sia del campo magnetico che del campo elettrico e valutandone il contributo relativo alla potenza irradiata. Si discutano a posteriori le condizioni per cui le perdite per irraggiamento possono essere trascurate nell'equazione del moto.

2

Nel sistema S del laboratorio due fili paralleli e infiniti, posti a distanza a l'uno dall'altro, possiedono le densità lineari di carica $\pm\lambda$, rispettivamente.

a) Calcolare la forza per unità di lunghezza su ogni filo.

Considerato un sistema di riferimento inerziale S' che si muove di velocità $\mathbf{V}$ rispetto a S e parallelamente ai fili, calcolare

b) i campi elettrico e magnetico e le loro sorgenti in S' ,

c) la forza per unità di lunghezza su ogni filo in S' , confrontando il risultato col valore ottenuto in S al punto a).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3)$$

Densità di forza di Lorentz su una distribuzione di cariche e correnti

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2. \quad (5)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (6)$$

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c), \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c), \quad (7)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

SOLUZIONI

1

a) L'elettrone percorre un'orbita circolare in senso antiorario, dovuta alla presenza della forza centripeta $-e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La velocità v_0 con cui viene descritta l'orbita si ricava uguagliando la forza magnetica alla forza centripeta

$$\frac{m_e v_0^2}{a} = e v_0 B_z(a) , \quad (8)$$

dove $-e$ è la carica dell'elettrone e m_e la sua massa. Dalla (8) otteniamo

$$v_0 = \frac{ea}{m_e} B_z(a) , \quad \omega = \frac{v_0}{a} = \frac{e}{m_e} B_z(a) . \quad (9)$$

b) Per la legge di Faraday-Neumann applicata all'orbita dell'elettrone abbiamo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = 2\pi a E_\phi = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_0^a \partial_t B_z(r, 0, t) 2\pi r dr , \quad (10)$$

d'altra parte, essendo $B_z(r, 0, t) = B_z(r)f(t)\hat{\mathbf{z}}$, la derivata di B_z è

$$\partial_t B_z = B_z(r)\dot{f}(t) , \quad (11)$$

che, inserita nella (10), ci dà

$$2\pi a E_\phi(a, t) = -\int_0^a B_z(r)\dot{f}(t) 2\pi r dr , \quad (12)$$

da cui otteniamo

$$E_\phi(a, t) = -\frac{\dot{f}(t)}{a} \int_0^a B_z(r) r dr = -\frac{a\dot{f}(t)}{2} \overline{B_z}(a) , \quad \text{dove} \quad \overline{B_z}(a) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a B_z(r) 2\pi r dr . \quad (13)$$

c) L'equazione del moto dell'elettrone lungo l'orbita per $t \geq 0$ è

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e E_\phi(a, t) , \quad (14)$$

che, integrando rispetto al tempo porta a

$$\begin{aligned} v(t) - v_0 &= -\frac{e}{m_e} \int_0^t E_\phi(a, t') dt' = \frac{ea}{2m_e} \overline{B_z}(a) \int_0^t \dot{f}(t') dt' = \frac{ea}{2m_e} \overline{B_z}(a) [f(t) - f(0)] \\ &= \frac{ea}{2m_e} \overline{B_z}(a) f(t) - \frac{ea}{2m_e} \overline{B_z} = \frac{ea}{2m_e} \overline{B_z}(a) f(t) - v_0 , \end{aligned} \quad (15)$$

poiché $f(0) = 1$. Quindi

$$v(t) = \frac{ea}{2m_e} \overline{B_z}(a) f(t) , \quad (16)$$

che corrisponde alla condizione perché l'elettrone resti in orbita

$$v(t) = \frac{ea}{m_e} B_z(a, t) = \frac{ea}{m_e} B_z(a) f(t) , \quad (17)$$

indipendentemente dalla forma di $f(t)$, purché sia $B_z(a) = \overline{B_z}(a)/2$.

d) La potenza irradiata è

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2, \quad (18)$$

e, sostituendo

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)^2 = \frac{e^2}{m_e^2} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 = \frac{e^2 a^2}{m_e^2} B_z^2(a) \dot{f}^2(t) + \frac{e^4 a^2}{m_e^4} B_z^4(a) f^2(t). \quad (19)$$

Notare che il rapporto tra il primo contributo, dovuto al termine elettrico, e il secondo contributo dovuto al termine magnetico è

$$\frac{\dot{f}^2(t)}{(eB_z(a)/m_e)^2 f^2(t)} = \left(\frac{\dot{f}(t)}{\omega_c f(t)} \right)^2 \quad (20)$$

e che questo termine è quindi piccolo se il campo magnetico varia lentamente rispetto al periodo di ciclotrone. In questo limite otteniamo

$$P_{\text{rad}} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^6 a^2}{3c^3 m_e^4} B_z^4(a), \quad (21)$$

che, su un periodo di durata

$$T = \frac{2\pi a}{v_0} = \frac{2\pi m_e}{eB_z(a)} \quad (22)$$

ci dà una perdita di energia

$$\Delta U = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^5 a^2 B_z^3(a)}{3c^3 m_e^3} \quad (23)$$

da confrontare all'energia cinetica dell'elettrone

$$K = \frac{m_e v_0^2}{2} = \frac{e^2 a^2}{2m_e} B_z^2(a). \quad (24)$$

La condizione $\Delta U \ll K$ è quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e^5 a^2 B_z^3(a)}{3c^3 m_e^3} &\ll \frac{e^2 a^2}{2m_e} B_z^2(a), \\ B_z(a) &\ll \frac{3\epsilon_0 c^3 m_e^2}{2e^3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Questa condizione può essere riscritta come

$$\frac{8\pi}{3} \frac{k_0 e^2}{m_e c^3} = \frac{8\pi}{3} \frac{r_c}{c} \ll \frac{m_e}{eB_z(a)}, \quad (26)$$

che, a meno di fattori, implica che il periodo di ciclotrone deve essere molto più lungo del tempo impiegato dalla radiazione ad attraversare una distanza pari al raggio classico dell'elettrone r_c .

2

a) Nel sistema di laboratorio S scegliamo una terna cartesiana con l'asse x coincidente con il filo di densità di carica $+\lambda$, l'asse y perpendicolare a x nel piano che contiene i due fili e l'asse z perpendicolare a x e y . Il campo generato dal filo positivo sul piano xy è

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \hat{\mathbf{y}}, \quad (27)$$

dove l' y al denominatore può essere sia positivo che negativo. Il modulo della forza esercitata sull'unità di lunghezza dell'altro filo è

$$f = \lambda E = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 a}, \quad (28)$$

ed è attrattiva, avendo i due fili densità lineari di carica di segno opposto.

b) Nel sistema S' abbiamo per le ampiezze dei campi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_{\perp}) = \gamma(\mathbf{E} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})_{\perp}, \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}_{\perp}\right) = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E}\right)_{\perp}, \end{aligned} \quad (29)$$

dove gli indici $\parallel$ e $\perp$ indicano le componenti *parallele* e *perpendicolari* al boost. Per un boost parallelo ai fili non cambiano né la dipendenza dei campi dalle coordinate ($x' = x$, $y' = y$) né la distanza tra i fili ($a = a'$). Quindi, avendo in S solo il campo $\mathbf{E}_{\perp}$, in S' abbiamo sul piano $x'y'$, dove giacciono i fili

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= 0, & E'_{y'} &= \gamma E_y, & E'_{z'} &= 0, \\ B'_{x'} &= 0, & B'_{y'} &= 0, & B'_{z'} &= -\frac{\gamma\beta}{c} E_y. \end{aligned} \quad (30)$$

Sempre in S' le densità di carica sui due fili diventano

$$\lambda'_{\pm} = \pm\gamma\lambda, \quad (31)$$

e sui fili stessi compaiono le correnti

$$I'_{\pm} = \mp\gamma\beta\lambda c. \quad (32)$$

c) La forza per unità di lunghezza tra i fili diventa

$$f' = \lambda' E' + I' B' = -\gamma^2 \lambda E + \gamma^2 \beta^2 \lambda E = f \quad (33)$$

Questo risultato è in accordo con la meccanica relativistica. Infatti la componente perpendicolare al boost della quadriforza (uguale a $dp_{\perp}/d\tau$, con τ tempo proprio) è invariante. Nel sistema S' la componente perpendicolare della forza totale "Newtoniana" è uguale è

$$\frac{dp_{\perp}}{dt'} = \frac{d\tau}{dt'} \frac{dp_{\perp}}{d\tau} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp_{\perp}}{d\tau}. \quad (34)$$

La lunghezza del filo L' viene contratta rispetto al sistema S in cui il filo è fermo: $L' = L/\gamma$. Calcolando la forza per unità di lunghezza in S' si ha allora

$$f' = \frac{1}{L'} \frac{dp_{\perp}}{dt'} = \frac{\gamma}{L} \frac{dp_{\perp}}{dt'} = \frac{1}{L} \frac{dp_{\perp}}{d\tau}, \quad (35)$$

che prova l'invarianza di f .