

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2016-2017

Compito di Fisica 2 (13/09/2017)

1

Si consideri un lungo cilindro di raggio a e altezza $h \gg a$, avente magnetizzazione permanente $\mathbf{M} = M\hat{\mathbf{z}}$ parallela al proprio asse.

a) Mostrare che all'interno del cilindro, a sufficiente distanza dalle basi, il campo magnetico vale approssimativamente $\mathbf{B}_0 \simeq \mu_0 \mathbf{M}$.

b) Mostrare che in corrispondenza delle basi la componente z vale approssimativamente $B_{b,z} \simeq B_0/2$.

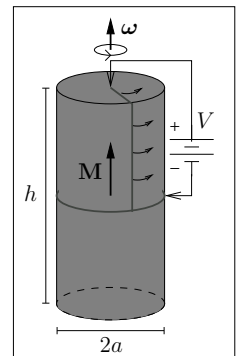
Il cilindro è libero di ruotare attorno al proprio asse. Si costruisce un circuito con contatti striscianti come in figura, nel quale si inserisce il generatore di tensione costante V . Calcolare

c) il momento torcente sul cilindro, in funzione della corrente I che scorre nel circuito;

d) la forza elettromotrice indotta nel circuito, in funzione della velocità angolare del cilindro ω .

e) Supponendo che la resistenza del circuito sia R , mostrare che il cilindro raggiunge una velocità angolare limite e darne il valore;

f) Supponendo inoltre che il momento di inerzia del cilindro sia $\mathcal{I}$, calcolare la legge temporale $\omega(t)$ con cui viene raggiunta la velocità angolare limite, assumendo che il circuito sia chiuso a $t = 0$ con $\omega(0) = 0$.



2

Nel sistema S del laboratorio si trovano due piani infiniti paralleli, aventi distanza h e spessore $b \ll h$, nei quali scorrono le opposte densità di corrente $\pm \mathbf{J}_0 = \pm J_0 \hat{\mathbf{x}}$ (ovvero le correnti superficiali $\pm \mathbf{J}_0$ con $\pm \mathbf{K}_0 = b \pm \mathbf{J}_0$).

a) Calcolare il campo magnetico nella regione compresa tra i due piani e la forza per unità di superficie $\mathbf{F}$ sui piani stessi.

Considerando ora il sistema S' in moto rispetto a S con velocità $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ parallela alle correnti, calcolare in S'

b) i campi elettrico e magnetico e le densità di carica e corrente;

c) la forza per unità di superficie $\mathbf{F}'$, confrontandola con $\mathbf{F}$;

d) le densità di energia e di quantità di moto del campo elettromagnetico in S e S' .

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x. \quad (2)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ in assenza di correnti “libere”

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} \equiv \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (3)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (4)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Teorema di conservazione della quantità di moto

$$[\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \partial_t(\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i = \partial_j T_{ij}, \quad (5)$$

dove T_{ij} è il tensore degli stress di Maxwell

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right]. \quad (6)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (7)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (8)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (9)$$

SOLUZIONI

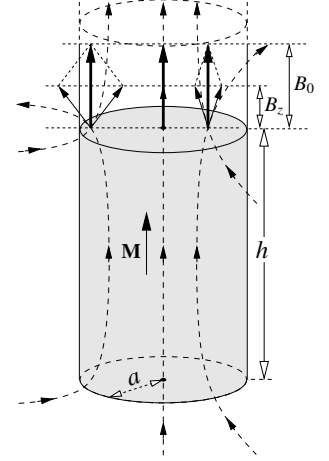
1

a) Possiamo considerare il campo magnetico all'interno del cilindro come dovuto alla corrente di magnetizzazione che scorre sulla sua superficie laterale, $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale uscente dalla superficie. Quindi il cilindro magnetizzato è equivalente a un solenoide con il prodotto $nI = K_m$. Per un cilindro molto lungo lontano dalle estremità abbiamo così approssimativamente il campo di un solenoide infinito

$$\mathbf{B}_0 \simeq \hat{\mathbf{z}} \mu_0 K_m \simeq \mu_0 \mathbf{M} \quad (10)$$

b) Il campo a una delle due basi, per esempio, alla base superiore, può essere ottenuto considerando il campo di un cilindro “esteso”, ottenuto aggiungendo al nostro un secondo cilindro, identico, alla base superiore in modo da ottenere un cilindro di lunghezza doppia. Il campo totale adesso è dovuto al doppio cilindro, e continua a valere $\mathbf{B}_0 \simeq \mu_0 \mathbf{M}$, essendo in zona centrale. Ma, per simmetria, il cilindro superiore e quello inferiore contribuiscono alla componente z di $\mathbf{B}_0$ in ugual modo, mentre le componenti radiali dovute ai due cilindri si cancellano, come in figura. Abbiamo quindi

$$B_{0z} \simeq \frac{B_0}{2} . \quad (11)$$



c) L'unico tratto del circuito su cui agisce la forza magnetica è il tratto AD, perché in DC la corrente è parallela al campo, mentre in BC la forza è radiale. Abbiamo quindi per il momento torcente

$$\mathbf{\Gamma} = I \int_0^a \boldsymbol{\ell} \times (d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) = \hat{\mathbf{z}} \frac{IB_0}{2} \frac{a^2}{2} = \hat{\mathbf{z}} \frac{IB_0 a^2}{4} = \hat{\mathbf{z}} \frac{I\mu_0 M a^2}{4} . \quad (12)$$

d) La forza elettromotrice può essere calcolata come l'integrale di $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell}$ lungo il percorso AOCB

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_A^O (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_O^C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_C^B (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= - \int_0^a \omega r B_0 dr = - \frac{1}{2} \left(\frac{B_0}{2} \right) a^2 \omega = - \frac{1}{4} \mu_0 M a^2 \omega , \end{aligned} \quad (13)$$

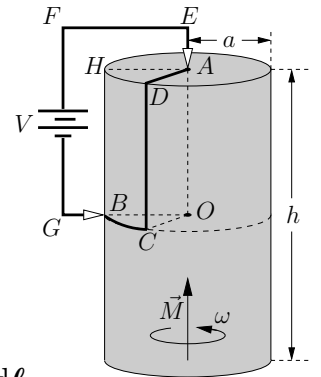
dato che $\mathbf{v} = 0$ lungo il tratto AO, che è sovrapposto all'asse di rotazione del cilindro, mentre $d\boldsymbol{\ell}$ è parallelo a $\mathbf{v}$ nel tratto CB.

Equivalentemente, si può calcolare $\mathcal{E}$ come variazione temporale del flusso magnetico attraverso il circuito, che si riduce al flusso attraverso la superficie HAD:

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \Phi_{HAD}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} a^2 \omega \left(\frac{B_0}{2} \right) = - \frac{1}{4} \mu_0 M a^2 \omega . \quad (14)$$

e) La forza elettromotrice totale del circuito è

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = V + \mathcal{E} = V - \frac{\mu_0 M a^2 \omega}{4} , \quad (15)$$



che si annulla per

$$\omega = \omega_{\text{lim}} = \frac{4V}{\mu_0 M a^2} , \quad (16)$$

che è così la velocità angolare limite raggiunta dal cilindro.

f) La corrente nel circuito è

$$I = \frac{V - \mathcal{E}}{R} = \frac{1}{R} \left(V - \frac{\mu_0}{4} M a^2 \omega \right) = -\frac{\mu_0 M a^2}{4R} (\omega - \omega_{\text{lim}}) , \quad (17)$$

quindi il modulo del momento torcente è

$$\Gamma = \frac{I \mu_0 M a^2}{4} = -\frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0}{4} M a^2 \right)^2 (\omega - \omega_{\text{lim}}) . \quad (18)$$

L'equazione del moto è

$$\mathcal{I} \frac{d\omega}{dt} = \Gamma , \quad (19)$$

che, con la condizione iniziale $\omega(0) = 0$, ha soluzione

$$\omega = \omega_{\text{lim}} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (20)$$

con

$$\tau = \frac{16 \mathcal{I} R}{\mu_0^2 M^2 a^4} . \quad (21)$$

2

a) Poiché $\mathbf{J}_0$ (o $\mathbf{K}_0$) è lungo $\hat{\mathbf{x}}$ e dipende solo da z , il campo magnetico $\mathbf{B}_0$ è diretto lungo y , ed è uniforme a tratti essendo $\mathbf{J} = 0$ ovunque eccetto che sui piani. Applicando il teorema di Stokes a un cammino rettangolare attorno a $z = \pm h/2$ e assumendo $\mathbf{B} = 0$ per $|z| > h/2$, si ottiene per $|z| < h/2$ il campo uniforme

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 b J_0 \hat{\mathbf{y}} = \mu_0 K_0 \hat{\mathbf{y}} . \quad (22)$$

La forza per unità di volume su una distribuzione di corrente è data da $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, da cui integrando sugli strati di corrente si ha per lo strato a $z = h/2$ la forza per unità di superficie

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} J_0 B_0 b \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} K_0 B_0 \hat{\mathbf{z}} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \hat{\mathbf{z}} , \quad (23)$$

mentre si ottiene $-\mathbf{F}$ sullo strato a $z = -h/2$. I piani tendono quindi a respingersi, essendo percorsi da correnti opposte.

b) Si ha che $(\rho c, \mathbf{J})$ è un quadrivettore. Per trasformazioni lungo $\hat{\mathbf{x}}$, anche $(\sigma c, \mathbf{K}) = (b\rho c, b\mathbf{J})$ trasforma nello stesso modo essendo b invariante (le lunghezze nella direzione trasversale alla velocità non si contraggono). dato che in S si ha $\rho = 0$, si ottiene ($\beta = V/c$)

$$\mathbf{J}' = \gamma \mathbf{J} = \gamma \mathbf{J}_0 , \quad \rho' = -\gamma \beta J_0 / c . \quad (24)$$

I campi possono essere ottenuti direttamente dalle relative trasformazioni, oppure a partire dalle sorgenti trasformate. Si ha

$$\mathbf{B}' = \gamma \mathbf{B} = \gamma \mathbf{B}_0 , \quad \mathbf{E}' = \gamma \beta c B \hat{\mathbf{z}} = (\rho' b / \varepsilon_0) \hat{\mathbf{z}} . \quad (25)$$

c) Alla forza magnetica repulsiva, calcolata come al punto a), si aggiunge un termine di forza elettrostatica attrattiva. In modulo

$$F' = \frac{B'^2}{2\mu_0} - \frac{\varepsilon_0}{2} E'^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} \gamma^2 (1 - \beta^2) = F , \quad (26)$$

come da attendersi dato che F' è proporzionale ad un invariante di Lorentz.

d) Direttamente dalle definizioni otteniamo in S

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B_0^2 , \quad \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0 , \quad (27)$$

mentre in S'

$$u' = \frac{\varepsilon_0}{2} (\gamma^2 \beta^2 c^2 B_0^2 + \gamma^2 c^2 B_0^2) = \frac{\varepsilon_0}{2} \gamma^2 (1 + \beta^2) B_0^2 , \quad \mathbf{g}' = -\varepsilon_0 \gamma^2 \beta c B_0^2 \hat{\mathbf{x}} . \quad (28)$$