Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2017-2018

Compito di Fisica 2 (07/09/2018)

1

a) Un cilindro di materiale elettrete (con polarizzazione elettrica permanente in assenza di campo) ha raggio a, lunghezza infinita e possiede una densità di polarizzazione elettrica permanente e uniforme $\mathbf{P}$ ortogonale all'asse. Dimostrare che il campo elettrico interno al cilindro è dato da

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0} \qquad (r < a)\ . \tag{1}$$

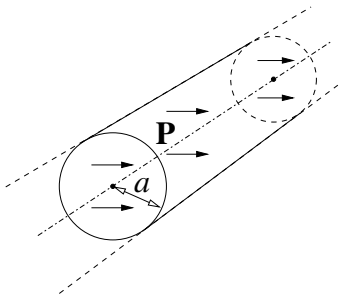

Figura 1

b) Si consideri ora il caso in cui il materiale del cilindro è dielettrico con suscettività χ (non c'è densità di polarizzazione permamente). Dimostrare, usando il risultato di **a)**, che in presenza di un campo elettrico esterno $\mathbf{E}_0$ ortogonale all'asse il cilindro acquista la densità di polarizzazione

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{1 + \chi/2}\mathbf{E}_0\ . \tag{2}$$

c) Nel caso di un cilindro conduttore in un campo esterno $\mathbf{E}_0$ come in **b)**, determinare la densità di carica superficiale.

d) Si consideri un metamateriale costituito da cilindri come al punto **b)**, paralleli tra loro, la cui distanza media tra gli assi è $b \gg a$. Si assuma che sul sistema incida un'onda piana linearmente polarizzata *ortogonalmente* agli assi e di frequenza ω tale che la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi c/\omega \gg b$. Mostrare, motivando la risposta, che in questo regime di frequenze la suscettività *macroscopica* χ_{met} del metamateriale (cioè valutata calcolando la densità di polarizzazione *mediata* su un volume che contiene un numero grande di cilindri) è data da

$$\chi_{\text{met}} = \pi \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\chi}{1 + \chi/2}\ . \tag{3}$$

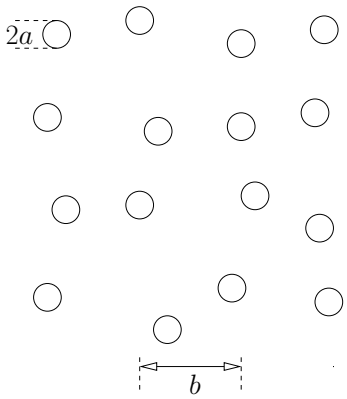

Figura 2

e) Per fili metallici tali che $\chi = \chi(\omega) = -\omega_p^2/\omega^2$, scrivere la forma di $\chi_{\text{met}} = \chi_{\text{met}}(\omega)$ e studiare la relazione di dispersione associata, determinando le regioni in cui l'onda è propagante o evanescente e le eventuali frequenze di taglio e di risonanza.
f) Come cambiano le risposte a **d)** ed **e)** se l'onda è polarizzata *parallelamente* agli assi dei cilindri? (**NB**: non si confonda la *densità di polarizzazione* ($\mathbf{P}$) del mezzo con la *polarizzazione* dell'onda!)

2

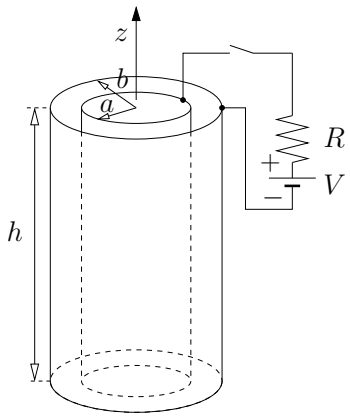

Figura 3

Un condensatore cilindrico è costituito da armature metalliche cilindriche coassiali di raggi a e $b > a$ ed ha lunghezza $h \gg b$. All'istante $t = 0$ le armature, precedentemente scariche, vengono connesse ai poli di un generatore di tensione costante V avente resistenza interna R, così che la carica su ciascuna armatura varia (in valore assoluto) nel tempo come

$$Q(t) = CV(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \,, \qquad (t > 0) \,, \tag{4}$$

dove $C = 2\pi\varepsilon_0 h/\ln(b/a)$ è la capacità del condensatore e $\tau = RC$.

Nel seguito si trascurino gli effetti di bordo (assumendo la carica come uniformemente distribuita sulle superfici delle armature), la resistenza delle armaturee e gli effetti di induzione magnetica assumendo l'approssimazione di correnti lentamente variabili. Sotto queste ipotesi calcolare

a) l'intensità di corrente lungo le armature in funzione della posizione z lungo l'asse del condensatore,
b) i campi elettrico e magnetico tra le armature,
c) il flusso di energia all'interno del condensatore, discutendo la conservazione dell'energia.
d) (*facoltativo*) Si discuta a posteriori l'applicabilità dell'approssimazione di correnti lentamente variabili e del trascurare l'induzione magnetica.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0\partial_t\mathbf{E}) \,. \tag{5}$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0 \,. \tag{6}$$

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$ e densità di carica $\rho = \rho_{\mathrm{lib}} + \rho_{\mathrm{pol}}$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_{\mathrm{lib}} \,, \qquad \mathbf{D} \equiv \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \,, \qquad \rho_{\mathrm{pol}} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} \,. \tag{7}$$

dove per mezzi dielettrici con suscettività χ ovvero con permittività $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E} \,, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E} \,. \tag{8}$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \,, \qquad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \,. \tag{9}$$

Relazione di dispersione di un mezzo con indice di rifrazione $\mathsf{n} = \mathsf{n}(\omega)$ ovvero permittività $\varepsilon = \varepsilon(\omega) = \mathsf{n}^2$

$$\omega^2 = \frac{k^2c^2}{\mathsf{n}^2(\omega)} \,. \tag{10}$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{V} = \left(r^{-1}\partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1}(\partial_r(rV_\phi) - \partial_\phi V_r)\right) \,. \tag{11}$$

SOLUZIONI

1

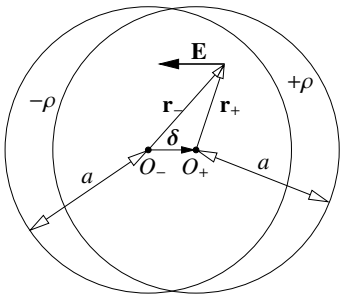

Figura 4

a) Si può modellizzare il sistema come due cilindri di eguali dimensioni e densità di carica opposte $\pm\rho$, i cui assi sono paralleli e separati di $\boldsymbol{\delta}$. Il campo generato da ogni cilindro al proprio interno è $\mathbf{E}_\pm = \pm\rho\,\mathbf{r}_\pm/(2\varepsilon_0)$. Calcolando il campo nella regione di sovrapposizione si ottiene

$$\mathbf{E} = \frac{R2\pi rh}{\rho} 2\varepsilon_0 \left(-\mathbf{r}_- + \mathbf{r}_+\right) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\rho(-\boldsymbol{\delta}) = -\frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0}\ , \tag{12}$$

dove nell'ultimo passaggio si è identificato $\mathbf{P} = \rho\boldsymbol{\delta}$.
b) Il campo totale all'interno del cilindro è la somma di quello esterno e di quello creato dalla densità di polarizzazione, supposta uniforme. Si ha allora

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E} = \varepsilon_0\chi\left(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{\rm pol}\right) = \varepsilon_0\chi\left(\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0}\right)\ , \tag{13}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il risultato di **a)**. Risolvendo per $\mathbf{P}$ si ottiene la (2),

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1+\chi/2}\mathbf{E}_0\ . \tag{14}$$

c) La densità di carica superficiale è equivalente a quella prodotta di una densità di polarizzazione che renda nullo il campo elettrico all'interno del cilindro. usando il risultato precedente si ha

$$\mathbf{P} = 2\varepsilon_0\mathbf{E}_0\ , \tag{15}$$

ovvero il limite della (2) per $\chi \to \infty$. Quindi

$$\sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 2\varepsilon_0 E_0\cos\theta\ . \tag{16}$$

d) Essendo $a \ll \lambda$ la polarizzazione indotta nei cilindri è data dalla (2) con $\mathbf{E}_0$ l'ampiezza del campo dell'onda. Poiché i cilindri riempiono una frazione del volume pari a $f = (\pi a^2/b^2)$ la densità di polarizzazione macroscopica è $\mathbf{P}_{\rm met} = f\mathbf{P}$, da cui

$$\chi_{\rm met\perp} = \pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\chi}{1+\chi/2}\ . \tag{17}$$

e) La funzione dielettrica è

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_{\rm met\perp} = 1 - \pi\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2/2} \tag{18}$$

La propagazione richiede $\varepsilon_r > 0$ da cui

$$\omega^2 > \frac{\omega_p^2}{2} + \pi\left(\frac{a}{b}\right)^2\omega_p^2 \simeq \frac{\omega_p^2}{2}\ , \tag{19}$$

essendo per ipotesi $\pi\,(a/b)^2 \ll 1$. Per $\omega = \omega_p/\sqrt{2}$ si ha risonanza.
f) Le condizioni al contorno impongono che il campo elettrico sia continuo alla superficie dei cilindri, per cui la polarizzazione all'interno dei cilindri è $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_0$ e si ottiene

$$\chi_{\rm met\parallel} = \pi\left(\frac{a}{b}\right)^2\chi\ . \tag{20}$$

2

a)

Consideriamo la posizione z, con $0 < z < h$, lungo l'asse del condensatore. Nell'ipotesi che la densità di carica sulle armature sia uniforme ad ogni istante, le cariche sulle porzioni di armatura comprese tra 0 e z valgono $\pm Q(t)z/h \equiv Q(z,t)$. L'intensità di corrente soddisfa quindi

$$I = I(z,t) = \frac{\mathrm{d}Q(z,t)}{\mathrm{d}t} = \frac{z}{h}\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} \equiv I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{z}{h}\ ,\ . \tag{21}$$

dove I_0 si ottiene derivando la (4) rispetto al tempo,

$$I_0 = \frac{CV}{\tau} = \frac{V}{R}\ . \tag{22}$$

b) Con le nostre approssimazioni il campo elettrico tra le armature è radiale, indipendente da z, e vale

$$E(r) = -\frac{CV(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})}{2\pi\varepsilon_0 h\, r}\ . \tag{23}$$

Ricordando la simmetria del problema, che $\mathbf{J}$ è diretto lungo z mentre $\mathbf{E}$ è diretto lungo r, dall'equazione di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{24}$$

scritta in coordinate cilindriche otteniamo

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})_r = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_r}{\partial t}\ , \tag{25}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r B_\phi}{\partial r} = \mu_0 J_z\ , \tag{26}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})_\phi = 0\ . \tag{27}$$

L'unica componente non nulla di $\mathbf{B}$ è B_ϕ, che può essere ottenuta, per esempio, dalla (26) applicando il teorema di Stokes a una circonferenza di raggio $a < r < b$ coassiale con il condensatore. Questa soluzione soddisfa anche la (25). Abbiamo

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= 2\pi r B_\phi(r,z,t) = \mu_0 I(z,t)\\ &= -2\pi a\frac{Ve^{-t/\tau}\,z}{R2\pi ah} = -\mu_0\frac{Ve^{-t/\tau}\,z}{Rh}\ ,\end{aligned} \tag{28}$$

da cui

$$B_\phi = -\mu_0\frac{Ve^{-t/\tau}\,z}{R2\pi rh} = -\mu_0\frac{CVe^{-t/\tau}\,z}{\tau\,2\pi rh}\ . \tag{29}$$

c) Il vettore di Poynting è

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{1}{\mu_0}\frac{CV(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})}{2\pi\varepsilon_0 h\, r}\,\mu_0\frac{CVe^{-t/\tau}\,z}{\tau\,2\pi rh} = -\hat{\mathbf{z}}\frac{C^2V^2(\mathrm{e}^{-t/\tau}-\mathrm{e}^{-2t/\tau})}{\tau\,4\pi^2\varepsilon_0 h^2 r^2}\,z\ , \tag{30}$$

con $\mathbf{S} = 0$ per $r < a$ o $r > b$. Il flusso di $\mathbf{S}$ attraverso un piano ad altezza z e perpendicolare a $\hat{\mathbf{z}}$ vale

$$\begin{aligned}\Phi_S(z,t) &= \int_a^b S\, 2\pi r \,\mathrm{d}r = -\frac{C^2V^2(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-2t/\tau})z}{\tau\, 2\pi\varepsilon_0 h^2} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &= -\frac{C^2V^2(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-2t/\tau})z\ln(b/a)}{\tau\, 2\pi\varepsilon_0 h^2} = -\frac{CV^2(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-2t/\tau})}{\tau}\,\frac{z}{h}\,. \end{aligned} \tag{31}$$

L'energia totale immagazzinata nel condensatore è

$$U(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} = \frac{C^2V^2(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})^2}{2C} = \frac{CV^2(1 - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{e}^{-2t/\tau})}{2}\,. \tag{32}$$

Data le nostre ipotesi sulla distribuzione della carica, l'energia immagazzinata nella parte del condensatore compresa tra il fondo, $z = 0$, e l'altezza $0 < z < h$ vale

$$U_z(z,t) = \frac{CV^2(1 - 2\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + \mathrm{e}^{-2t/\tau})}{2}\,\frac{z}{h}\,. \tag{33}$$

Abbiamo quindi che la derivata temporale di $U_z(z,t)$ vale

$$\frac{\partial U_z(z,t)}{\partial t} = \frac{CV^2}{2}\,\frac{z}{h}\left(\frac{2\,\mathrm{e}^{-t^\tau}}{\tau} - \frac{2\,\mathrm{e}^{-2t/\tau}}{\tau}\right) = \frac{CV^2(\mathrm{e}^{-t/\tau} - \mathrm{e}^{-2t/\tau})}{\tau}\,\frac{z}{h}\,, \tag{34}$$

pari all'energia per unità di tempo che entra attraverso il piano all'altezza z. Il segno $-$ della (31) è dovuto al fatto che il vettore di Poynting è diretto verso il basso. Notiamo che nel bilancio dell'energia non compaiono i termini dovuti al campo magnetico in quanto di ordine superiore nell'approssimazione di correnti lentamente variabili.

d) L'ipotesi di correnti lentamente variabili giustifica l'ipotesi di distribuzione uniforme della carica sulle armature. Il condensatore può essere visto come una porzione di cavo coassiale in cui si propagano segnali di carica e di corrente in modo TEM, a velocità c. In queste condizioni la densità di carica può essere considerata uniforme se abbiamo $h/c \ll \tau$. Questo equivale a supporre che le lunghezze d'onda corrispondenti allo spettro di frequenza del segnale siano molto più lunghe di h, in modo che il campo possa essere considerato uniforme lungo z.

Per valutare gli effetti di induzione valutiamo il campo elettrico $\mathbf{E}_1$ indotto dalla variazione di $\mathbf{B}$. Nell'ambito dell'approssimazione di correnti lentamente variabili $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}_1 \simeq -\partial_t \mathbf{B}$ con $\mathbf{B}$ dato dalla (24). Assumendo $t > 0$, in coordinate cilindriche otteniamo $\partial_z E_{1r} \simeq -\partial_t B_\phi$, da cui, integrando e trascurando eventuali costanti determinate dalla condizioni al bordo, otteniamo

$$E_{1r} \simeq \mu_0 \frac{CV}{2\pi r h}\mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{z^2}{2\tau^2} \sim E\left(\frac{z}{c\tau}\right)^2 \qquad (t > 0)\,, \tag{35}$$

con E dato dalla (24). Quindi gli effetti di induzione sono trascurabili se $\max(z) = h \ll c\tau$, il che è equivalente alla condizione sopra citata per la validità dell'approssimazione di correnti lentamente variabili.

Notiamo però che le approssimazioni non sono valide nella fase immediatamente inziale della carica del condensatore, in quanto il campo magnetico è discontinuo temporalmente a $t = 0$, il che fornisce un E_1 finito a fronte di un E_0 nullo. Quindi, una descrizione accurata necessita di considerare gli effetti di induzione, ovvero l'autoinduttanza "parassita" del condensatore, almeno nella fase iniziale della carica.