

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2018-2019

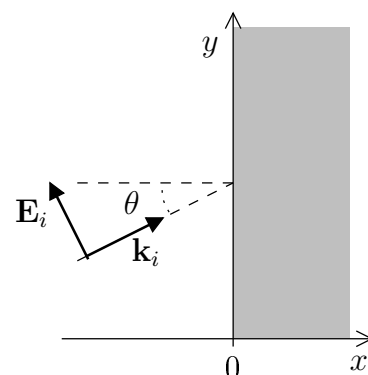
Compito di Fisica 2 (17/09/2019)

0

Un'onda elettromagnetica piana monocromatica di frequenza ω , il cui campo elettrico si può scrivere come

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{E}}_i e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right], \quad (1)$$

con $\mathbf{k}_i = k(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ e $\tilde{\mathbf{E}}_i = E_0(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, incide ad angolo θ sulla superficie $x = 0$ che delimita uno specchio perfetto ($\mathbf{E}=0$ e $\mathbf{B}=0$ per $x > 0$).



a) Scrivere l'espressione del campo elettrico $\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{E}}_r e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right]$ dell'onda riflessa dallo specchio, verificando le condizioni al bordo per $\mathbf{E}$.

b) Determinare la densità di carica superficiale σ sullo specchio e la forza per unità di superficie P_E esercitata dal campo elettrico e mediata sul periodo.

c) Determinare la densità di corrente superficiale $\mathbf{K}$ sullo specchio e la forza per unità di superficie P_M esercitata dal campo magnetico e mediata sul periodo.

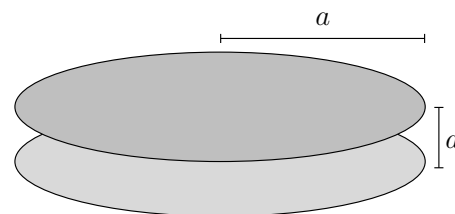
d) Si esprima la forza totale $P_E + P_M$ in funzione dell'intensità I_i dell'onda incidente.

1

Un condensatore piano ha armature parallele circolari di raggio a , poste a distanza $d \ll a$. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Si assuma inizialmente che le armature siano isolate e su di esse si trovino le cariche $\pm Q$ uniformemente distribuite. Le armature vengono lasciate libere di muoversi per effetto della loro attrazione, cosicchè in un certo intervallo temporale la distanza $d = d(t)$ dipenda dal tempo (ma abbastanza lentamente da poter assumere l'approssimazione di correnti lentamente variabili). Calcolare, in funzione di $d(t)$, la variazione dell'energia elettrostatica del condensatore e il lavoro meccanico compiuto sulle armature, e verificare il teorema di conservazione dell'energia (**NB**: si diano le risposte in funzione di $d(t)$, il cui calcolo esplicito è facoltativo.)

b) Si risponda alle stesse domande di a) assumendo che le armature non siano isolate ma connesse attraverso un generatore ideale che mantiene una tensione costante V tra di esse.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} , \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (3)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (4)$$

SOLUZIONI

0

a) Sia $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t)$ il campo dell'onda riflessa, con

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{E}}_r e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right] . \quad (5)$$

Per la legge della riflessione si ha $\mathbf{k}_r = k(-\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Il campo elettrico ha lo stesso modulo di quello incidente ed è trasversale rispetto a $\mathbf{k}_r$, per cui rimane solo da scegliere il suo segno relativo al campo incidente. La componente E_y del campo totale $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ deve essere continua alla superficie e quindi nulla. La scelta corretta è quindi $\tilde{\mathbf{E}}_r = E_0(-\sin\theta, -\cos\theta, 0)$, come si verifica immediatamente:

$$E_y(x=0) = E_{iy}(x=0) + E_{ry}(x=0) = E_0 \cos\theta e^{iky \sin\theta - i\omega t} + E_0(-\cos\theta) e^{iky \sin\theta - i\omega t} = 0 . \quad (6)$$

b) L'equazione $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ implica che alla superficie $x=0$ si ha $E_x(x=0^+) - E_x(x=0^-) = \sigma/\varepsilon_0$. Dato che $E_x(x=0^+) = 0$ otteniamo

$$\sigma = -\varepsilon_0 E_x(x=0^-) = \text{Re} \left[+2\varepsilon_0 E_0 \sin\theta e^{iky \sin\theta - i\omega t} \right] . \quad (7)$$

La forza media per unità di superficie è data da

$$P_E = \left\langle \frac{1}{2} \sigma E_x(x=0^-) \right\rangle = \left\langle -\frac{\varepsilon_0}{2} E_x^2(x=0^-) \right\rangle = -\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \theta . \quad (8)$$

c)

Per $x < 0$ il campo magnetico è dato da

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{z}} \frac{E_0}{c} (e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - i\omega t}) \right] . \quad (9)$$

L'equazione $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$ implica che alla superficie $x=0$ si ha $B_z(x=0^+) - B_z(x=0^-) = -\mu_0 K_y$ (essendo $\partial_x B_z = -\mu_0(J_y + \varepsilon_0 \partial_t E_y)$). Dato che $B_z(x=0^+) = 0$ otteniamo

$$K_y = \frac{1}{\mu_0} B_z(x=0^-) = \text{Re} \left[\frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{iky \sin\theta - i\omega t} \right] . \quad (10)$$

La forza media per unità di superficie è data da

$$P_M = \left\langle \frac{1}{2} K_y B_z(x=0^-) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2\mu_0} B_z^2(x=0^-) \right\rangle = +\varepsilon_0 E_0^2 . \quad (11)$$

d) Si ha

$$I_i = \langle |\mathbf{S}_i| \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 , \quad (12)$$

quindi

$$P_M + P_E = \varepsilon_0 E_0^2 (1 - \sin^2 \theta) = \frac{2I_i}{c} \cos^2 \theta . \quad (13)$$

Notiamo che il risultato è in accordo col teorema della conservazione della quantità di moto,

$$\partial_t(\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \mathbf{T} = -\rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (14)$$

dove T_{ij} è il tensore degli stress di Maxwell,

$$T_{ij} = -\varepsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right]. \quad (15)$$

Infatti il flusso P di quantità di moto elettromagnetica attraverso lo superficie dello specchio si riduce a

$$P = -T_{xx}(0^-, t) = \frac{\varepsilon_0}{2} [c^2 B_z^2(0^-, t) - E_x^2(0^-, t)], \quad (16)$$

che fornisce di nuovo la (13).

2

a) Il campo $E = Q/\varepsilon_0 A$ è costante ($A = \pi a^2$ superficie delle armature). La potenza meccanica sviluppata sulle cariche è

$$W_E = \frac{1}{2} E Q \dot{d} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \dot{d}, \quad (17)$$

dove il fattore (1/2) tiene conto della discontinuità di E sullo strato di carica superficiale. La variazione di energia elettrostatica è

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A d \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A \dot{d} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} \dot{d}, \quad (18)$$

che è uguale alla potenza esercitata sulle cariche: l'energia del campo si converte completamente in energia cinetica.

b) Adesso $E = V/d(t)$ non è costante. La potenza meccanica è ancora data da $W_E = \frac{1}{2} E Q \dot{d}$. La variazione di energia elettrostatica ha un termine in più,

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A d \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 A \dot{d} + \varepsilon_0 (E \partial_t E) A d. \quad (19)$$

La corrente di spostamento genera un campo magnetico solenoidale

$$B_\phi(r) = -\frac{r}{2c^2} \partial_t E, \quad (20)$$

per cui si ha un vettore di Poynting radiale

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(r, t) = \hat{\mathbf{r}} \varepsilon_0 c^2 E B_\phi(r) = -\frac{\varepsilon_0}{2} r E \partial_t E. \quad (21)$$

Per calcolare il flusso di energia elettromagnetica consideriamo allora una superficie cilindrica di raggio a coassiale al condensatore e le cui basi si estendono appena oltre le armature. Il flusso di $\mathbf{S}$ attraverso le basi è nullo, così che il flusso totale attraverso la superficie del condensatore è dato dal solo contributo della superficie laterale:

$$\Phi_S = 2\pi a d S(a, t) = -\pi a^2 d \varepsilon_0 E \partial_t E = -\varepsilon_0 (E \partial_t E) A d. \quad (22)$$

Si ha quindi la relazione

$$\frac{dU_E}{dt} = W_E - \Phi_S, \quad (23)$$

che è il teorema di Poynting per il condensatore. Notare che il generatore esterno fornisce la potenza $W_{\text{ext}} = \Phi_S$ necessaria a mantenere V costante.