

# Corso di Laurea in Fisica

## Anno Accademico 2021-2022

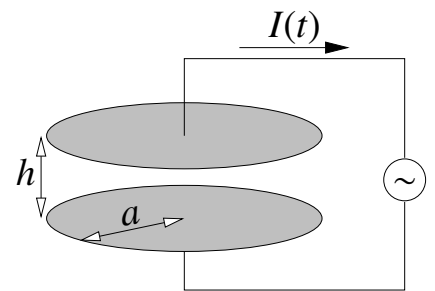
---

### Compito di Fisica 2A (15/09/2022)

---

1

Un condensatore piano è formato da due armature metalliche parallele e circolari di raggio  $a$  poste a distanza  $h \ll a$  tra loro. Il condensatore è connesso a un generatore che impone la corrente oscillante  $I = I(t) = \text{Re}(I_0 e^{-i\omega t})$  (nel seguito è sottintesa la dipendenza temporale  $\propto e^{-i\omega t}$  per ogni campo).



Trascurando gli effetti di bordo e usando l'approssimazione di correnti lentamente variabili, calcolare

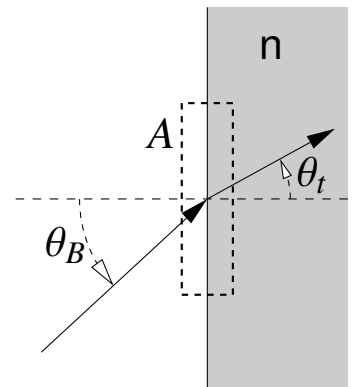
- il campo elettrico  $\mathbf{E}_0$  all'interno del condensatore e la densità di carica superficiale sulle armature  $\pm\sigma_0$ , all'ordine più basso di approssimazione in cui sia  $\mathbf{E}_0$  che  $\sigma_0$  sono considerati uniformi;
- il campo magnetico  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1(r)$  all'interno del condensatore, all'ordine più basso non nullo (con  $r$  distanza dall'asse del condensatore);
- le correzioni al campo elettrico  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(r)$  e alla densità superficiale  $\sigma_2 = \sigma_2(r)$  all'ordine successivo, fissando eventuali costanti di integrazione col requisito che il generatore mantenga sempre la stessa corrente in ingresso  $I(t)$ .
- Calcolare la potenza (mediata sul periodo)  $P_{\text{rad}}$  irradiata dal condensatore, in approssimazione di dipolo, esprimendo il risultato nella forma  $P_{\text{rad}} = (1/2)R_{\text{rad}}|I_0|^2$  e valutando  $R_{\text{rad}}$  per  $a = 1$  cm,  $h = 1$  mm e  $\omega/2\pi = 50$  Hz o 5000 Hz (può essere utile ricordare che  $Z_0 \equiv \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.7$  Ohm).

2

Un'onda monocromatica piana di ampiezza del campo elettrico  $E_0$  e polarizzata  $P$  incide su un mezzo semi-infinito di indice di rifrazione reale  $n > 1$  all'angolo di Brewster  $\theta_B$  (tale che l'angolo di rifrazione  $\theta_t = \pi/2 - \theta_B$  da cui  $\tan \theta_B = n$ ) così che non c'è onda riflessa.

Calcolare

- l'ampiezza del campo magnetico dell'onda trasmessa ( $B_t$ ),
- l'ampiezza del campo elettrico dell'onda trasmessa ( $E_t$ ),
- il flusso del vettore di Poynting  $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  attraverso la superficie chiusa  $A$  che racchiude l'interfaccia tra mezzo e vuoto, come mostrato in figura.



## FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (2)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (3)$$

dove  $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

Relazione di dispersione per un mezzo con indice di rifrazione  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\omega)$

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\mathbf{n}^2} \quad (4)$$

## SOLUZIONI

### 1

a) Usiamo un sistema di coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$  con l'asse polare  $z$  coincidente con l'asse di simmetria del condensatore. Otteniamo l'approssimazione iniziale  $Q^{(0)}(t)$  per la carica del condensatore dalla relazione

$$\frac{dQ^{(0)}(t)}{dt} = -I(t) , \quad (5)$$

che ci porta a

$$Q^{(0)}(t) = i \frac{I_0}{\omega} e^{-i\omega t} = Q_0 e^{-i\omega t} , \quad \text{con} \quad Q_0 = i \frac{I_0}{\omega} , \quad (6)$$

il fattore  $i$  indica uno sfasamento di  $\pi/2$  tra carica e corrente, la carica è in ritardo di un quarto di periodo rispetto alla corrente. Otteniamo poi come approssimazione iniziale per la densità di carica sulle armature

$$\sigma^{(0)}(t) = \sigma_0 e^{-i\omega t} , \quad \text{con} \quad \sigma_0 = \frac{Q_0}{\pi a^2} = i \frac{I_0}{\pi a^2 \omega} . \quad (7)$$

Come approssimazione iniziale per il campo elettrico tra le armature  $\mathbf{E}^{(0)}(t) = \hat{\mathbf{z}} E^{(0)}(t)$  abbiamo

$$E^{(0)}(t) = \frac{\sigma^{(0)}(t)}{\varepsilon_0} = E_0 e^{-i\omega t} , \quad \text{con} \quad E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = i \frac{I_0}{\pi a^2 \varepsilon_0 \omega} . \quad (8)$$

b) Otteniamo l'approssimazione iniziale per il campo magnetico  $\mathbf{B}^{(1)}(t) = \hat{\phi} B^{(1)}(t)$  dalla relazione

$$\nabla \times \mathbf{B}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t} , \quad (9)$$

da cui, applicando il teorema di Stokes, abbiamo

$$2\pi r B^{(1)} = -i\omega \pi r^2 E^{(0)} , \quad \text{quindi} \quad B^{(1)} = \frac{\mu_0 r I_0}{2\pi a^2} e^{-i\omega t} . \quad (10)$$

c) La correzione successiva al campo elettrico,  $\mathbf{E}^{(2)}$ , si ottiene dalla relazione

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(2)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(1)}}{\partial t} , \quad \text{da cui, in coordinate cilindriche,} \quad -\frac{\partial E^{(2)}}{\partial r} = -i\omega B^{(1)} , \quad (11)$$

dove abbiamo tenuto conto che  $\mathbf{B}^{(1)}$  è diretto lungo  $\hat{\phi}$  ed  $\mathbf{E}^{(2)}$  lungo  $\hat{\mathbf{z}}$ . Inserendo la (10) troviamo

$$E^{(2)}(r) = E^{(2)}(0) - \frac{i\omega \mu_0 r^2}{4\pi a^2} I_0 , \quad (12)$$

con  $E^{(2)}(0)$  una costante di integrazione da determinare. La correzione successiva alla densità di carica delle armature, dipendente da  $r$ , è

$$\sigma^{(2)}(r) = \varepsilon_0 E^{(2)}(r) . \quad (13)$$

La costante  $E^{(2)}(0)$  si determina imponendo che

$$\frac{d(Q^{(0)} + Q^{(2)})}{dt} = -I , \quad (14)$$

dove

$$Q^{(2)} = \int_0^a \sigma^{(2)}(r) 2\pi r dr . \quad (15)$$

Ricordando la (5) dobbiamo avere  $Q^{(2)} = 0$ , quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^a \left[ E^{(2)}(0) - \frac{i\omega\mu_0 r^2}{4\pi a^2} I_0 \right] 2\pi r dr \\ E^{(2)}(0)\pi a^2 &= i \frac{\omega\mu_0 a^2}{8} I_0 \\ E^{(2)}(0) &= i \frac{\omega\mu_0}{8\pi} I_0 . \end{aligned} \quad (16)$$

d) Il momento di dipolo del condensatore vale

$$\mathbf{p}(t) = \hat{\mathbf{z}} Q^{(0)}(t) h = \hat{\mathbf{z}} i \frac{I_0}{\omega} e^{-i\omega t} h , \quad (17)$$

quindi la potenza totale irraggiata mediata sul periodo vale

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \overline{|\ddot{\mathbf{p}}|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \overline{|\ddot{Q}^{(0)} h|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3c^3} |h I_0 \omega|^2 , \quad (18)$$

dove la barra indica la media sul periodo ed è stato inserito un fattore 1/2 dovuto alla media sul periodo. Ricordando che  $1/(\epsilon_0 c) = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = Z_0$  abbiamo

$$P_{\text{rad}} = \frac{Z_0}{12\pi} \left( \frac{\omega h}{c} \right)^2 I_0^2 . \quad (19)$$

Dalla definizione abbiamo

$$R_{\text{rad}} = \frac{2P_{\text{rad}}}{I_0^2} = \frac{Z_0}{6\pi} \left( \frac{\omega h}{c} \right)^2 \quad (20)$$

Inserendo i valori proposti otteniamo  $R_{\text{rad}} \simeq 2.3 \times 10^{-17} \Omega$  a 50 Hz e  $\simeq 2.3 \times 10^{-13} \Omega$  a 5000 Hz.

## 2

a) La componente del campo magnetico parallela all'interfaccia è continua, quindi abbiamo

$$B_t = B_0 = \frac{E_0}{c} , \quad (21)$$

dove  $B_t$  è l'intensità del campo magnetico dell'onda trasmessa,  $E_0$  e  $B_0$  le intensità dei campi elettrico e magnetico dell'onda incidente.

b) Per un'onda piana in un mezzo omogeneo abbiamo

$$E_t = v_f B_t = \frac{c}{n} B_t = \frac{E_0}{n} , \quad (22)$$

dove  $v_f$  è la velocità di fase dell'onda nel mezzo.

c) Il flusso di energia entrante nella superficie chiusa  $A$  è, per unità di superficie,

$$\Phi_i = \mathbf{S}_i \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) = -(\varepsilon_0 c^2 E_0 B_0) \cos \theta_B = -(\varepsilon_0 c E_0^2) \cos \theta_B . \quad (23)$$

dove  $\mathbf{S}_i = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}_i \times \mathbf{B}_i$  è il vettore di Poynting dell'onda incidente, e  $\hat{\mathbf{x}}$  è il versore entrante perpendicolare alla superficie di interfaccia tra vuoto e mezzo. Il flusso di energia uscente da  $A$ , sempre per unità di superficie, è

$$\Phi_t = \mathbf{S}_t \cdot (+\hat{\mathbf{x}}) = -(\varepsilon_0 c^2 E_t B_t) \cos \theta_t = \left( \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{n} \right) \sin \theta_B , \quad (24)$$

dove  $\mathbf{S}_t = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}_t \times \mathbf{B}_t$  è il vettore di Poynting dell'onda trasmessa. Sfruttando la relazione  $\tan \theta_B = n$  abbiamo

$$\frac{|\Phi_t|}{|\Phi_i|} = \frac{1}{n} \frac{\sin \theta_B}{\cos \theta_B} = \frac{1}{n} \tan \theta_B = 1 , \quad (25)$$

quindi tutta l'energia entrante viene trasmessa nel mezzo.