

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (14/09/2023)

1

Un metallo ha una densità di n_e elettroni liberi descrivibili con l'equazione classica del moto

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \nu \mathbf{v} . \quad (1)$$

Si consideri la risposta del metallo a un campo oscillante $\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t})$.

a) Ricavare le espressioni della conducibilità $\sigma = \sigma(\omega)$ e della suscettività dielettrica $\chi = \chi(\omega)$,

$$\sigma(\omega) = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega + i\nu} , \quad \chi(\omega) = \frac{i\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)} , \quad (2)$$

dove $\omega_p^2 = n_e e^2 / \varepsilon_0 m_e$.

Su una piccola sfera di raggio a del metallo sopra descritto incide un'onda elettromagnetica con campo elettrico $\mathbf{E}(x, t) = \text{Re}(\mathbf{E}_i e^{ikx - i\omega t})$, frequenza $\omega \gg \nu$ e lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi c/\omega \gg a$. Sia I l'intensità dell'onda.

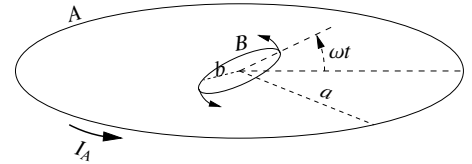
b) Calcolare, in media sul periodo e giustificando eventuali assunzioni e approssimazioni, la potenza P_{irr} diffusa dalla sfera per irraggiamento di dipolo elettrico. Si *stim*i per quale valore di ω si ha un massimo di P_{irr} e si mostri che la sezione d'urto $\sigma_{\text{irr}} = P_{\text{irr}}/I$ può essere scritta come $\sigma_{\text{irr}} = \pi a^2 (\omega a/c)^n f(\omega)$ dove n è un intero da determinare e $f(\omega)$ una funzione adimensionale della frequenza.

2

Due spire conduttrici circolari A e B sono concentriche e hanno raggi a e $b \ll a$ e resistenze R_A e R_B rispettivamente. La spira A è fissata nel piano mentre la spira B è mantenuta in rotazione uniforme intorno a un diametro con velocità angolare ω .

Assumendo che in A è mantenuta la corrente continua I_A , calcolare

- la corrente I_B indotta in B ,
- il momento delle forze esterne necessario a mantenere B in rotazione uniforme.
- Se adesso in B si mantiene una corrente continua I_B , calcolare la corrente I_A indotta in A .



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Definizione di suscettività (χ) e permittività (ε_r) dielettriche per un mezzo lineare

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} , \quad \varepsilon_r = 1 + \chi , \quad \varepsilon_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r . \quad (4)$$

Campo elettrico interno a una sfera dielettrica con permittività ε_r in campo esterno uniforme $\mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r + 2} . \quad (5)$$

Campo magnetico generato al centro di una spira circolare di raggio a percorsa dalla corrente I (con $\hat{\mathbf{n}}$ versore normale al piano della spira)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{\mathbf{n}} . \quad (6)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (7)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (8)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (9)$$

SOLUZIONI

1

a) Rappresentiamo tutto in ampiezze complesse ovvero $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, etc. e cerchiamo una soluzione dell'equazione del moto nella forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-i\omega t}$. Sostituendo si ha

$$-i\omega \mathbf{v}_0 = -(e/m_e) \mathbf{E}_0 - \nu \mathbf{v}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_0 = \frac{-i(e/m_e)}{\omega + i\nu} \mathbf{E}_0. \quad (11)$$

Per definizione $\mathbf{J} = -en_e \mathbf{v}$ da cui

$$\mathbf{J}_0 = \frac{ie^2 n_e / m_e}{\omega + i\nu} \mathbf{E}_0 = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega + i\nu} \mathbf{E}_0 \equiv \sigma(\omega) \mathbf{E}_0. \quad (12)$$

Si ha inoltre $\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P}$ da cui $\mathbf{J}_0 = -i\omega \mathbf{P}_0$. Essendo anche $\mathbf{P}_0 = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0$, si ha

$$\chi(\omega) = i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} = -\frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \quad (13)$$

b) Poiché $\lambda \gg a$ il campo dell'onda è approssimativamente uniforme sulla sferetta e possiamo generalizzare l'espressione elettrostatica per il momento di dipolo della sferetta $\mathbf{p}$ al caso dipendente dal tempo:

$$\mathbf{p}_0 = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P}_0 = \frac{4\pi}{3} a^2 \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_{\text{int}0} = \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{3\varepsilon_0 \chi(\omega)}{3 + \chi(\omega)} \mathbf{E}_i. \quad (14)$$

Per lo stesso motivo la sferetta diffonde coerentemente e quindi si può calcolare la potenza irradiata (mediata sul periodo) con la formula di Larmor per un dipolo elettrico:

$$P_{\text{irr}} = \frac{k_0}{3c^2} \omega^4 |\mathbf{p}_0|^2 = \frac{k_0}{3c^3} \omega^4 \left(\frac{4\pi}{3} a^3 \right)^2 \frac{9\varepsilon_0^2 |\chi(\omega)|^2}{|3 + \chi(\omega)|^2} |\mathbf{E}_i|^2. \quad (15)$$

Poiché $|3 + \chi(\omega)|^2 = (3 + \text{Re}\chi)^2 + (\text{Im}\chi)^2$, il massimo di P_{irr} si ha per $3 + \text{Re}\chi \simeq 0$ ovvero $\omega = \omega_p / \sqrt{3}$.

Introducendo l'intensità dell'onda $I = c\varepsilon_0 |\mathbf{E}_i|^2$ si ha

$$\sigma_{\text{irr}} = \pi a^2 \left(\frac{\omega a}{c} \right)^4 \frac{4}{|3 + \chi(\omega)|^2}. \quad (16)$$

2

a) Per il flusso del campo magnetico attraverso la spira B indotto dalla corrente circolante nella spira A , $\Phi_{A \rightarrow B}$, abbiamo

$$\Phi_{A \rightarrow B} \simeq \pi b^2 \frac{\mu_0 I_A}{2a} \hat{\mathbf{n}}_A \cdot \hat{\mathbf{n}}_B = \pi b^2 \frac{\mu_0 I_A}{2a} \cos \omega t \equiv M_{A \rightarrow B}(t) I_A, \quad (17)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}_A$ e $\hat{\mathbf{n}}_B$ sono i versori perpendicolari ai piani delle spire A e B . Abbiamo considerato il campo generato dalla spira A praticamente uniforme sulla superficie della spira B . Da qui ricaviamo il coefficiente di mutua induzione tra le due spire

$$M_{A \rightarrow B}(t) = M_{B \rightarrow A}(t) = \pi b^2 \frac{\mu_0}{2a} \cos \omega t. \quad (18)$$

Per la corrente I_B circolante nella spira B abbiamo dalla legge di Faraday-Neumann

$$I_B = -\frac{1}{R_B} \frac{d}{dt} \Phi_{A \rightarrow B} = \pi b^2 \frac{\mu_0 I_A}{2a} \omega \sin \omega t . \quad (19)$$

b) Indicando con $\boldsymbol{\tau}$ il momento delle forze esterne applicato alla spira B per mantenerla in rotazione abbiamo per la potenza dissipata P_{dis}

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = P_{\text{dis}} = R_B I_B^2 = \frac{1}{R_B} \omega^2 \left(\pi b^2 \frac{\mu_0 I_A}{2a} \right)^2 \sin^2 \omega t , \quad (20)$$

da cui, dividendo per ω ,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{R_B} \boldsymbol{\omega} \left(\pi b^2 \frac{\mu_0 I_A}{2a} \right)^2 \sin^2 \omega t . \quad (21)$$

c) Il coefficiente di mutua induzione, che è simmetrico, è dato dalla (18). Abbiamo quindi per il flusso indotto dall spira B attraverso la spira A

$$\Phi_{B \rightarrow A} = M_{B \rightarrow A} I_B = M_{A \rightarrow B} I_B = \pi b^2 \frac{\mu_0 I_B}{2a} \cos \omega t . \quad (22)$$

Da qui, applicando nuovamente la legge di Faraday-Neumann,

$$I_A = -\frac{1}{R_A} \frac{d}{dt} \Phi_{B \rightarrow A} = \pi b^2 \frac{\mu_0 I_B}{2a} \omega \sin \omega t . \quad (23)$$