

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2023-2024

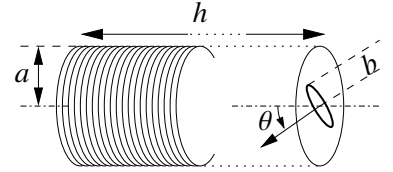
Compito di Fisica 2 (03/09/2024)

1

a) Mostrare che in un lungo solenoide avente raggio a , altezza $h \gg a$, n spire per unità di lunghezza percorse dalla corrente I il campo B_b al centro di una base è circa la metà del campo all'interno distante dalle basi ($B_b \simeq \mu_0 n I / 2$).

b) Si consideri una spira circolare di raggio $b \ll a$ posta col proprio centro coincidente con quello della base del solenoide e inclinata di un angolo θ rispetto alla base. Mostrare che il coefficiente di mutua induzione tra spira e solenoide è dato da

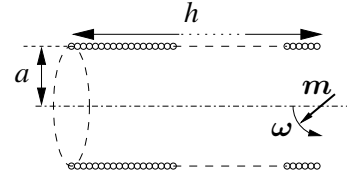
$$M = \frac{1}{2} \mu_0 n \pi b^2 \cos \theta . \quad (1)$$



Un corpo puntiforme con momento magnetico $\mathbf{m}$ è posto al centro di una base del solenoide e mantenuto in rotazione con velocità angolare ω perpendicolare a $\mathbf{m}$ e parallela al piano della base.

c) Calcolare la forza elettromotrice indotta nel solenoide.

d) Assumendo che il solenoide sia connesso in un circuito con resistenza totale R , calcolare la potenza P dissipata nel circuito e il momento $\mathbf{M}$ delle forze (in media sul periodo di rotazione) necessario per mantenere in rotazione il corpo con momento magnetico. Si diano stime numeriche assumendo $n = 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$, $m = 10^{-2} \text{ J T}^{-1}$.



2

Nel sistema del laboratorio L un'onda EM monocromatica e piana, il cui campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(kx - \omega t) = \frac{1}{2} E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{ikx - i\omega t} + \text{c.c.} , \quad (2)$$

si propaga in un mezzo omogeneo avente indice di rifrazione reale e positivo $n > 1$ con velocità di fase $v_f = \omega/k = c/n$.

a) Scrivere l'espressione del campo magnetico dell'onda.

Considerato adesso un sistema L' che si muove con velocità v_f rispetto a S , determinare in L'

b) le espressioni dei campi elettrico e magnetico calcolandone le ampiezze, la frequenza e il vettore d'onda, mostrando in particolare che i campi sono *statici*;

c) le densità di carica e corrente.

d) Considerato ora un sistema L'' in moto con velocità V rispetto a L con $v_f < V < c$, determinare in L'' la frequenza, il vettore d'onda e il vettore di Poynting $\mathbf{S}''$; in che direzione si propaga l'onda?

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (5)$$

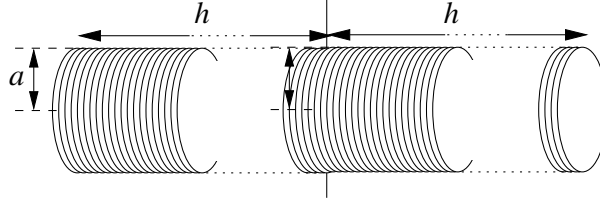
dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (6)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (7)$$

SOLUZIONI



a) Si usa il principio di sovrapposizione. Immaginando di porre in serie due solenoidi uguali con stessa corrente il campo sulle basi si raddoppia; al tempo stesso ora il campo è uguale al valore lontano dal centro, quindi

$$2B_b = \mu_0 n I . \quad (8)$$

b) Se nel solenoide (s) scorre la corrente I_s il flusso generato dal solenoide (s) sulla spira (c) è

$$\Phi_{s \rightarrow c} = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_b \pi b^2 \cos \theta = \frac{1}{2} \mu_0 n \pi b^2 \cos \theta I_s \equiv M I_s . \quad (9)$$

c) Se nella spira del punto b) circola la corrente I_c , il flusso generato nel solenoide è

$$\Phi_{c \rightarrow s} = M I_c = \frac{1}{2} \mu_0 n \pi b^2 \cos \theta I_c . \quad (10)$$

Il corpo genera lo stesso campo di una piccola spira per cui $\mathbf{m} = \pi b^2 I_c \hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ la normale alla superficie della spira. Quindi sostituendo nell'espressione precedente $\pi b^2 I_c = m$ e $\theta = \omega t$ si ottiene il flusso

$$\Phi_{m \rightarrow s} = \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mu_0 n m \cos \omega t . \quad (11)$$

d) Usando la legge di Faraday per i circuiti

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_{m \rightarrow s}}{dt} = \frac{1}{2} \mu_0 n m \omega \sin \omega t = R I_s(t) . \quad (12)$$

La potenza media dissipata è

$$P = R \langle I_s^2(t) \rangle = \frac{(\mu_0 n m \omega)^2 \langle (\sin \omega t)^2 \rangle}{4R} = \frac{(\mu_0 n m \omega)^2}{8R} . \quad (13)$$

Il momento esercitato dal campo magnetico del solenoide sul corpo rotante è

$$\langle \mathbf{m} \times \mathbf{B}_s \rangle = \frac{(\mu_0 m n)^2}{4R} \boldsymbol{\omega} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{(\mu_0 m n)^2}{8R} \boldsymbol{\omega} \equiv -\mathbf{M} , \quad (14)$$

ovvero il momento esterno deve essere eguale e opposto al momento della forza magnetica per mantenere la rotazione costante. Si verifica immediatamente che

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = P_d , \quad (15)$$

relazione che poteva essere usata per determinare $\mathbf{M}$. Numericamente $P = 4 \times 10^{-5}$ W, $M = 4 \times 10^{-8}$ N m.

2

a) Dall'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ si ottiene

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{z}} \cos(kx - \omega t) = \frac{1}{2} B_0 \hat{\mathbf{y}} e^{ikx - i\omega t} + \text{c.c.} , \quad (16)$$

con

$$B_0 = \frac{k E_0}{\omega} = \frac{E_0}{v_f} . \quad (17)$$

b) Applicando le trasformazioni del quadrivettore $(\omega, \mathbf{k}c)$ si ha

$$\omega' = \gamma(v_f)(\omega - v_f k) = 0 , \quad (18)$$

$$k' = \gamma(v_f)(k - v_f \omega/c^2) = k/\gamma(v_f) . \quad (19)$$

I campi variano come $\sim e^{ik'x'}$ e sono indipendenti da t' .

Usando le formule della trasformazione dei campi per le ampiezze

$$E'_0 = \gamma(v_f)(E_0 - v_f B_0) = 0 \quad (20)$$

$$B'_0 = \gamma(v_f)(B_0 - v_f E_0/c^2) = B_0/\gamma(v_f) . \quad (21)$$

$$(22)$$

Il campo è quindi puramente magnetostatico: $\mathbf{B}' = B'_0 e^{ik'x'}$, $\mathbf{E}' = 0$.

c) Usando $\nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}'$ si ha

$$\mu_0 \mathbf{J}' = \hat{\mathbf{y}} \partial'_x B'_z = ik' B'_0 e^{ik'x'} \quad (23)$$

mentre $\rho' = 0$.

d) Procedendo come in c)

$$\omega'' = \gamma(V)(\omega - V k) = \gamma(V)\omega(1 - V/v_f) < 0 , \quad (24)$$

$$k'' = \gamma(V)(k - V\omega/c^2) = \gamma(V)k(1 - Vv_f/c^2) > 0 . \quad (25)$$

L'onda in L'' si propaga da destra verso sinistra

$$\mathbf{E}'' = \frac{1}{2} E''_0 \hat{\mathbf{y}} e^{ik''x'' + i|\omega''|t''} + \text{c.c.} = E''_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(k''x'' + \omega''t''), \quad (26)$$

$$\mathbf{B}'' = -\frac{\omega''}{2k''} E''_0 \hat{\mathbf{z}} e^{ik''x'' + i|\omega''|t''} + \text{c.c.}, \quad (27)$$

$$, \quad (28)$$

come si vede anche da $\mathbf{S}'' = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}'' \times \mathbf{B}'' \propto -\hat{\mathbf{x}}$.