

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2025-2026

Compito di Fisica 2 (02/09/2026)

1

Un'onda elettromagnetica di pulsazione ω viene inviata in un esperimento di Young, con due fori a distanza d ed uno schermo a distanza $D \gg d$ lungo l'asse x .

a) Determinare la posizione dei massimi di interferenza e la distanza fra due frange consecutive.

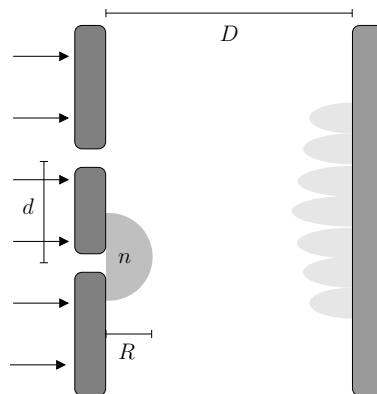
Una semisfera di materiale trasparente con indice di rifrazione $n(\omega)$ è posta su un foro come in figura; il raggio della semisfera $R < d$ ma è grande rispetto al diametro nel foro.

b) Mostrare che l'interferenza dipende dalla velocità di fase v_f nel materiale della sfera e discutere quale osservazione sulla frange di interferenza consente di misurare v_f e in particolare se $v_f > c$.

Tutto il volume è ora riempito dallo stesso materiale della sfera.

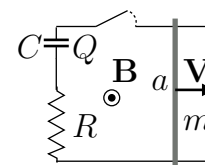
c) Discutere quale osservazione sulla frange di interferenza consente di misurare se $v_f > c$. Assumendo $d = 1 \text{ mm}$, $D = 10 \text{ m}$, $\omega = 3 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ (che corrisponde al rosso nel vuoto), $n(\omega) = 0.5$ si dia il valore per la distanza fra due frange di interferenza consecutive, specificando quale colore è osservato sullo schermo.

d) Si dia un esempio di mezzo materiale e di intervallo di frequenze per cui la $v_f > c$.



2

Il circuito in figura ha resistenza totale R , contiene una capacità C su cui si trova la carica $Q = Q(t)$. Un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}$ è ortogonale al piano del circuito. Il lato destro del circuito, di lunghezza a e massa m , può scorrere orizzontalmente senza attrito con velocità V . L'interruttore viene chiuso a $t = 0$ quando su C si trova la carica $Q(0) = Q_0$ e il lato mobile ha velocità iniziale nulla $V(0) = 0$. L'autoinduzione è trascurabile. Mostrare che:



a) la f.e.m. indotta nel circuito in funzione di V è $\mathcal{E} = -BaV$ e che la forza meccanica agente sul lato mobile in funzione della corrente $I = dQ/dt$ nel circuito è $F = BaI$;

b) la variazione temporale dell'energia elettrostatica è uguale alla somma della potenza dissipata per effetto Joule e della potenza meccanica sul lato mobile (suggerimento: si parta dall'equazione del circuito $RI + Q/C = \mathcal{E}$);

c) la corrente nel circuito ha l'andamento $I(t) = I(0)e^{-t/\tau}$, determinando il valore di τ .

d) A partire dall'espressione di $I(t) = I(0)e^{-t/\tau}$ ottenuta al punto **c)** si determinino per integrazione gli andamenti temporali di $Q = Q(t)$ e $V = V(t)$, scegliendo le costanti di integrazione dalle condizioni iniziali e da $I(t \rightarrow \infty) = 0$, determinando così $I(0)$ in funzione di Q_0 e i valori asintotici di Q e V .

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , & \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , & \mu_0\varepsilon_0 &= 1/c^2 , \\ k_0 &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \times 10^9 \text{ m/F} .\end{aligned}\tag{1}$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) .\tag{2}$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} .\tag{3}$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J} d^3x = \mathbf{J} S d\boldsymbol{\ell} = I d\boldsymbol{\ell}$.

SOLUZIONI

1

- a) La lunghezza d'onda è $\lambda = 2\pi c/\omega$. Indicando con y la coordinata trasversale sullo schermo, per $D \gg d$ la differenza di cammino è $\Delta r \simeq dy/D$. I massimi si hanno per $\Delta r = m\lambda$, con m intero. Pertanto si hanno massimi a

$$y_m = m \frac{\lambda D}{d}, \quad \Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d}.$$

- b) La regione di materiale introduce una differenza di fase $\delta\phi$ che sposta la posizione y delle frange nel verso opposto rispetto al caso $n > 1$

$$\delta\phi = \omega R \left(\frac{1}{v_f} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\omega R}{c} (n - 1), \quad \delta y = \frac{DR}{d} (n - 1).$$

- c) Se tutto il volume è riempito, la lunghezza d'onda diventa $\lambda_m = \lambda_0/n$. La distanza fra due frange consecutive diventa

$$\Delta y = \frac{D\lambda_0}{nd}.$$

Pertanto $v_f > c$ produce frange più distanziate che nel vuoto. Inserendo i valori numerici si ottiene $\Delta y \approx 13$ mm. Il colore osservato rimane rosso, in quanto è determinato dalla frequenza che non varia nel materiale.

- d) Un esempio è un plasma non magnetizzato, ovvero un materiale approssimabile come elettroni liberi. Per frequenze superiori alla frequenza di plasma, $\omega > \omega_p$, la relazione di dispersione è $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$ e quindi

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c.$$

Dunque l'intervallo richiesto è $\omega > \omega_p$.

Un altro esempio sono onde elettromagnetiche che attraversano un materiale con una frequenza molto superiore alle sue frequenze di risonanza. Di conseguenza, queste onde interagiscono con alcuni elettroni esterni come se questi fossero approssimativamente liberi.

2

- a) Detta $X = X(t)$ la posizione del lato mobile la f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = -\frac{d}{dt} (BaX) = -BaV \quad (4)$$

essendo $V = -dX/dt$.

La forza sul lato mobile, al passaggio della corrente I , è

$$\mathbf{F} = \int I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = BaI\hat{\mathbf{x}}, \quad (5)$$

dove $\hat{\mathbf{x}}$ è nella direzione del moto consentita dai vincoli.

b) La potenza meccanica è data da $P_m = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = FV$. Sostituendo la (5) e l'equazione del circuito scritta in funzione di V ,

$$RI + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} = -BaV, \quad (6)$$

dove $I = dQ/dt$, si ha

$$FV = (BaI) \left(-\frac{1}{Ba} \right) \left(RI + \frac{Q}{C} \right) = -RI^2 - I \frac{Q}{C}. \quad (7)$$

La potenza dissipata è $P_d = RI^2$, mentre per la variazione dell'energia elettrostatica

$$\frac{d}{dt}U_e = \frac{d}{dt} \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} I. \quad (8)$$

Si ha quindi $P_m + P_d = -dU_e/dt$.

c) L'equazione del moto per il lato mobile è

$$m \frac{dV}{dt} = F = BaI. \quad (9)$$

Derivando l'equazione del circuito (6) rispetto a t si ottiene allora

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -Ba \frac{dV}{dt} = \frac{(Ba)^2}{m} I, \quad (10)$$

ovvero

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\tau} I, \quad \tau = \frac{RC}{1 + (Ba)^2 C/m}. \quad (11)$$

La soluzione per $t > 0$ è

$$I(t) = I(0)e^{-t/\tau}, \quad (12)$$

d) A $t = 0$ si ha $V = 0$ e quindi $\mathcal{E} = 0$. Quindi dalla (6) otteniamo

$$RI_0 + \frac{Q_0}{C} = 0, \quad (13)$$

da cui $I_0 = Q_0/RC$.

Integrando la (12) rispetto a t si ha

$$Q(t) = -I_0 \tau e^{-t/\tau} + Q_\infty. \quad (14)$$

La condizione $Q(0) = Q_0$ impone

$$Q_\infty = Q_0 + I_0 \tau = Q_0 \left(1 + \frac{1}{1 + (Ba)^2 C/m} \right). \quad (15)$$

Sostituendo la (12) nella (9) si ha

$$\frac{dV}{dt} = \frac{Ba}{m} I_0 e^{-t/\tau}, \quad (16)$$

con soluzione per $V(0) = 0$

$$V(t) = \frac{Ba}{m} I_0 \tau (1 - e^{-t/\tau}) \equiv V_\infty (1 - e^{-t/\tau}) , \quad (17)$$

dove la velocità asintotica $V_\infty = V(t \rightarrow \infty) = (Ba/m)I_0\tau$. Quindi la f.e.m. (4) è asintoticamente costante, $\mathcal{E}_\infty = \mathcal{E}(t \rightarrow \infty) = -BaV_\infty$. Poichè nello stesso limite $I(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, dalla (6) deve essere $\mathcal{E}_\infty - Q_\infty/C = 0$ ovvero la f.e.m. è esattamente cancellata dalla caduta di tensione dovuta alla carica residue sulla capacità. Si ha allora

$$Q_\infty = -BaCV_\infty = -\frac{(Ba)^2CI_0\tau}{m} = Q_0 \frac{(Ba)^2C/m}{(1 + (Ba)^2C/m)^2} . \quad (18)$$

Si ha infine

$$V_\infty = -\frac{Q_0Ba/m}{1 + (Ba)^2C/m} . \quad (19)$$

Notiamo che V_∞ è indipendente da R e che

$$\frac{m}{2}V_\infty^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \frac{(Ba)^2C/m}{(1 + (Ba)^2C/m)^2} , \quad (20)$$

ovvero il fattore adimensionale $(Ba)^2C/m$ determina la frazione di energia elettrostatica che si converte in energia cinetica.