

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2011-2012

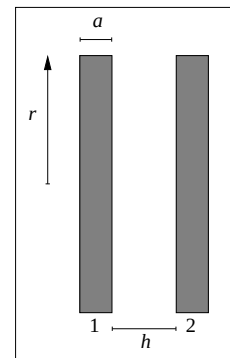
Compito di Fisica 2 (21/11/2011)

1

Due lastre metalliche identiche, 1 e 2, hanno base circolare di raggio r e spessore $a \ll r$. Le lastre sono coassiali, parallele, isolate e a distanza fra loro $h \ll r$.

a) Si supponga inizialmente che su ogni lastra si trovi la stessa carica Q (NB: anche il segno della carica è lo *stesso* per entrambe le lastre!). Determinare come la carica si distribuisce sulle superfici delle lastre, trascurando gli effetti di bordo (NB: per ogni lastra considerare *entrambe* le superfici di base!) e calcolare la forza che si esercita tra le lastre. [8 punti]

b) Si supponga adesso che sulle lastre si trovino cariche *diverse* Q_1 e Q_2 . Determinare la distribuzione di carica sulle superfici e il campo elettrico tra le due lastre. [7 punti]



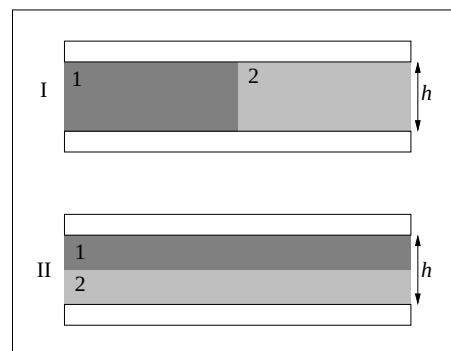
2

Si consideri un condensatore piano con armature di superficie S e separazione h . Lo spazio tra le armature è riempito a metà da due materiali di permittività dielettriche diverse ϵ_1 e ϵ_2 , secondo ciascuna delle due configurazioni I e II mostrate in figura. Tra le armature è mantenuta la d.d.p. costante V .

a) Per ciascuna delle due configurazioni calcolare il campo elettrico nelle regioni 1 e 2. [8 punti]

Si assuma adesso che i due dielettrici non siano perfetti isolanti e posseggano conducibilità non nulle σ_1 e σ_2 .

b) Calcolare nuovamente il campo elettrico e la densità di corrente nelle regioni 1 e 2 per ciascuna configurazione (in condizioni *stazionarie*), stabilendo in particolare se sulle superfici di separazione tra i due dielettrici compare una densità superficiale di carica libera. [7 punti]



3

Una sfera conduttrice di raggio R sulla cui superficie è presente la carica elettrica libera Q viene immersa in un mezzo avente permittività dielettrica ϵ e conducibilità σ .

a) Calcolare la legge temporale ed il tempo caratteristico con i quali la sfera si scarica. [8 punti]

b) Mostrare che nella scarica l'energia dissipata nel mezzo per effetto Joule è uguale alla variazione dell'energia elettrostatica. [7 punti]

c) (facoltativa) Come cambierebbero le risposte precedenti per un conduttore carico di forma *arbitraria*? [5 punti]

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

Per il punteggio verranno valutate le **4 risposte migliori** sulle domande **a)** e **b)** (ovvero i 4 punteggi parziali più alti sull'insieme delle domande) più l'eventuale risposta alla domanda facoltativa **3 c)**.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni dell'elettrostatica dei dielettrici (ρ_{lib} densità di carica volumica libera)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (1)$$

Densità di corrente $\mathbf{J}$ e potenza dissipata P_{dis} per unità di volume in conduttori Ohmici con conducibilità σ o resistività $\rho = 1/\sigma$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \rho^{-1} \mathbf{E}, \quad P_{\text{dis}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (2)$$

Equazione di continuità per la carica elettrica (ρ densità di carica volumica)

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (3)$$

ovvero in forma integrale, per un volume $\mathcal{T}$ racchiuso dalla superficie S (con $\hat{\mathbf{n}}$ versore perpendicolare a dS in direzione uscente)

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{T}} \rho d^3x = - \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (4)$$

Energia elettrostatica U_{es} associata ad una distribuzione di carica (ρ densità di carica, V potenziale, $\mathbf{E}$ campo elettrico)

$$U_{\text{es}} = \frac{1}{2} \int \rho_{\text{lib}} V d^3x = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3x. \quad (5)$$

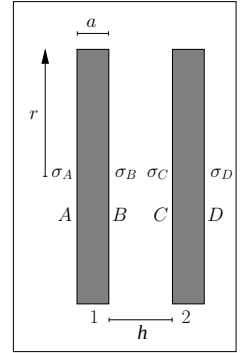
dove l'integrale di volume è esteso a tutto lo spazio.

SOLUZIONI

1

a) Se trascuriamo gli effetti ai bordi, la carica di ogni lastra si distribuisce sulle due superfici di base: la carica della lastra 1 si distribuisce sulle superfici A e B della figura, mentre la carica della lastra 2 si distribuisce sulle superfici C e D . Su ogni base la densità superficiale di carica sarà uniforme. Per la conservazione della carica dovrà essere così

$$\pi r^2(\sigma_A + \sigma_B) = \pi r^2(\sigma_C + \sigma_D) = Q. \quad (6)$$



Inoltre il campo elettrico deve essere nullo all'interno dei conduttori. Ogni superficie carica A , B , C e D , facendo l'ipotesi che la carica sia positiva, genera un campo $E_X = \sigma_X/2\epsilon_0$ (con $X = A, B, C, D$) perpendicolare alla superficie stessa, e diretto verso sinistra alla sua sinistra, verso destra alla sua destra. Abbiamo così le due ulteriori equazioni

$$\sigma_A - \sigma_B - \sigma_C - \sigma_D = 0$$

$$\sigma_A + \sigma_B + \sigma_C - \sigma_D = 0. \quad (7)$$

Le (6) insieme alle (7) formano un sistema di quattro equazioni lineari in quattro incognite la cui soluzione è

$$\sigma_A = \sigma_D = \frac{Q}{\pi r^2}, \quad \text{e} \quad \sigma_B = \sigma_C = 0. \quad (8)$$

Il campo è così nullo in tutto lo spazio tra la superficie A e la superficie D .

Per quel che riguarda la forza, consideriamo la densità di carica σ_A sulla superficie A . Alla sua sinistra il campo, diretto perpendicolarmente alla lastra e verso sinistra nella figura, vale

$$E = \frac{\sigma_A}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (9)$$

mentre alla sua destra, come abbiamo detto, è nullo. La forza sulla lastra vale quindi

$$F = \frac{Q^2}{2\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (10)$$

diretta perpendicolarmente alla lastra e verso sinistra nella figura (le lastre, avendo carica di ugual segno, si respingono). Poiché sulla superficie B non c'è carica, questa è tutta la forza che agisce sulla lastra di sinistra. La forza sulla lastra di destra si può ottenere dal terzo principio della dinamica.

b) Adesso la conservazione della carica ci dà, al posto delle (6), le due equazioni

$$\pi r^2(\sigma_A + \sigma_B) = Q_1, \quad \pi r^2(\sigma_C + \sigma_D) = Q_2, \quad (11)$$

mentre la condizione che il campo sia nullo all'interno dei conduttori è ancora data dalle (7). Questa volta il sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite da risolvere è dato dalle (11) e (7), e le soluzioni sono

$$\sigma_A = \frac{Q_1 + Q_2}{2\pi r^2}, \quad \sigma_B = \frac{Q_1 - Q_2}{2\pi r^2}, \quad \sigma_C = \frac{Q_2 - Q_1}{2\pi r^2}, \quad \sigma_D = \frac{Q_2 + Q_1}{2\pi r^2}. \quad (12)$$

Il campo tra le due superfici sarà

$$E = \frac{\sigma_A + \sigma_B - \sigma_C - \sigma_D}{2\epsilon_0} = \frac{Q_1 - Q_2}{2\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (13)$$

diretto verso destra se $Q_1 > Q_2$, verso sinistra se $Q_1 < Q_2$.

2

a) Nella configurazione I usiamo il fatto che, alla superficie di separazione tra due dielettrici la componente parallela del campo elettrico $E_{\parallel}$ (in questo caso coincidente con tutto il campo) è continua. Poiché la relazione $V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ è valida anche in un dielettrico, abbiamo

$$E_1 = E_2 = \frac{V}{h}. \quad (14)$$

Nella configurazione II sarà invece continuo il prodotto $\varepsilon E_{\perp}$, dove $E_{\perp}$ è la componente del campo perpendicolare alla superficie di separazione, coincidente, questa volta, con tutto il campo. Quindi abbiamo

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2, \quad \text{da unire alla condizione} \quad E_1 \frac{h}{2} + E_2 \frac{h}{2} = V. \quad (15)$$

Abbiamo così un sistema di due equazioni lineari in due incognite, la cui soluzione è

$$E_1 = \frac{2V\varepsilon_2}{h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad E_2 = \frac{2V\varepsilon_1}{h(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \quad (16)$$

b) Dal punto di vista delle correnti, la configurazione I si comporta come due resistenze messe in parallelo, il campo elettrico nelle due regioni rimane lo stesso di prima e avremo le densità di corrente $\vec{J}_1 = \sigma_1 \vec{E}$ e $\vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E}$.

La configurazione II, invece, si comporta come due resistenze messe in serie, quindi, la densità di corrente deve essere la stessa nei due strati: $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$, che, con la seconda condizione delle (15) ci porta a

$$E_1 = \frac{2V\sigma_2}{h(\sigma_1 + \sigma_2)}, \quad E_2 = \frac{2V\sigma_1}{h(\sigma_1 + \sigma_2)}. \quad (17)$$

In questo modo non è più continua la componente perpendicolare alla superficie di separazione di $\varepsilon \vec{E}$, e quindi compare una densità superficiale di carica libera Σ_{lib} sulla superficie di separazione stessa. Dal teorema di Gauss abbiamo

$$\Sigma_{\text{lib}} = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{2V}{h} \frac{\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (18)$$

3

a) Il campo elettrico generato nel mezzo dalla sfera conduttrice carica vale, al di fuori della sfera stessa

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad \text{cui corrisponde una densità di corrente} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (19)$$

Attraverso una qualunque superficie sferica di raggio r maggiore del raggio della sfera, e concentrica alla sfera stessa, passa quindi una corrente

$$I = \oint_{\text{sup. sferica}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon} Q. \quad (20)$$

Per la conservazione della carica abbiamo quindi

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} Q, \quad \text{da cui} \quad Q = Q_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}, \quad (21)$$

dove Q_0 è la carica della sfera all'istante $t = 0$. Si ha quindi un decadimento esponenziale con costante di tempo $\tau = \varepsilon/\sigma$.

b) L'energia elettrostatica iniziale è data dall'integrale

$$U_0 = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\text{fuori dalla sfera}} E^2(t=0) d^3x = \frac{\varepsilon}{2} \int_R^\infty \frac{1}{16\pi^2\varepsilon^2} \frac{Q_0^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon R}. \quad (22)$$

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando il lavoro necessario per portare la carica dall'infinito alla superficie della sfera. In presenza di una densità di corrente $\vec{J}$ e di una conducibilità del mezzo σ , la potenza dissipata per unità di volume vale J^2/σ . Per l'energia totale dissipata avremo quindi

$$\begin{aligned} U_{\text{diss}} &= \int_0^\infty dt \int_{\text{fuori dalla sfera}} \frac{J^2}{\sigma} d^3x = \int_0^\infty dt \int_R^\infty \left[\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t}}{r^2} \right]^2 \frac{1}{\sigma} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{\sigma Q_0^2}{4\pi\varepsilon^2} \int_0^\infty e^{-2(\sigma/\varepsilon)t} dt \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{\sigma Q_0^2}{4\pi\varepsilon^2} \frac{\varepsilon}{2\sigma} \frac{1}{R} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon R}. \end{aligned} \quad (23)$$

c) In questo caso il campo non ha più simmetria sferica. Però, presa una qualunque superficie chiusa S che racchiuda il conduttore, questa sarà attraversata da una corrente complessiva

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon} Q \quad (24)$$

per il teorema di Gauss. Abbiamo quindi ancora

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} Q \quad (25)$$

e la legge di scarica rimane la stessa che per il conduttore sferico.