

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (27/11/2013)

1

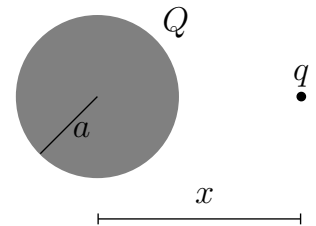
Una sfera conduttrice ha raggio a . Se la sfera è elettricamente isolata e su di essa si trova la carica Q , calcolare la pressione sulla superficie

- a) direttamente, cioè dalla conoscenza del campo elettrico e della densità di carica sulla superficie;
- b) usando il principio dei lavori virtuali, cioè considerando la variazione dell'energia totale della sfera rispetto ad a .
- c) Si calcoli adesso la pressione se la sfera non è elettricamente isolata ma è connessa a un generatore ideale di tensione costante V .

2

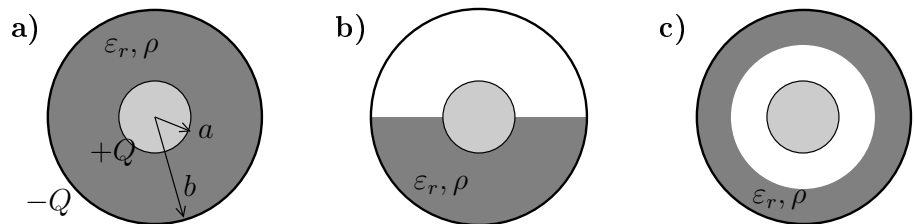
Una sfera conduttrice ha raggio a , è isolata e possiede una carica totale Q . A distanza x dal centro della sfera si trova una carica puntiforme q dello stesso segno di Q .

- a) Si risolva il problema del potenziale col metodo delle cariche immagine.
- b) Si scriva la forza $\mathbf{F}$ sulla carica puntiforme e si dica, sia nel limite di carica a grande distanza ($x \gg a$) che molto vicina alla superficie ($x \rightarrow a^+$) se $\mathbf{F}$ è attrattiva o repulsiva e come dipende dalla distanza.
- c) Si calcoli l'energia potenziale di q come lavoro fatto dalla forza per portare q all'infinito.



3

Un condensatore sferico ha raggio interno a , raggio esterno b , ed è riempito di un materiale avente permittività dielettrica relativa ϵ_r e resistività ρ . Il condensatore è isolato e sulle armature si trovano le cariche $\pm Q$, rispettivamente.



- a) Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore e il tempo in cui il condensatore si scarica. Si risponda di nuovo alla domanda a) nel caso di un condensatore riempito per metà del materiale b) come in figura b),
- c) come in figura c), ovvero vuoto per $a < r < (a+b)/2$, e dielettrico nel guscio $(a+b)/2 < r < b$.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

Ogni domanda vale **5 punti**.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni dell'elettrostatica per mezzi con permittività dielettrica ε :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (1)$$

Soluzione del problema della carica q a distanza d dal centro di una sfera conduttrice di raggio a messa a terra; si pone una carica immagine q' a distanza d' dal centro, con

$$q' = -(a/d)q , \quad d' = a^2/d . \quad (2)$$

Equazione di continuità per la corrente e legge di conservazione della carica per un volume $\mathcal{V}$ racchiuso dalla superficie $\mathcal{S}$

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} , \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') d^3 r' = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} . \quad (3)$$

Legge di Ohm (ρ resistività, σ conducibilità)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{E} / \rho . \quad (4)$$

SOLUZIONI

1

a) All'interno della sfera conduttrice il campo è nullo, mentre immediatamente fuori abbiamo $E = Q/(4\pi\epsilon_0 a^2)$ perpendicolare alla superficie della sfera. La densità superficiale di carica vale $\sigma = Q/(4\pi a^2)$. Per la pressione abbiamo quindi

$$P = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{(Q/S)^2}{2\epsilon_0} \quad (5)$$

dove $S = 4\pi a^2$.

b) L'energia elettrostatica di una sfera di raggio a con carica Q distribuita uniformemente sulla superficie può essere calcolata "per costruzione", ottenendo

$$U_{\text{es}} = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} dq = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}, \quad (6)$$

da cui otteniamo per la pressione P

$$P = \frac{1}{4\pi a^2} \left(-\frac{dU_{\text{es}}}{da} \right) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{(Q/S)^2}{2\epsilon_0}. \quad (7)$$

c) Sostituendo $V = Q/(4\pi\epsilon_0 a)$ nella (5) abbiamo

$$P = \frac{\epsilon_0 V^2}{2a^2}. \quad (8)$$

Scrivendo invece $U_{\text{es}} = 2\pi\epsilon_0 a V^2$ e usando il fatto che a tensione costante $\Delta U_{\text{tot}} = \Delta U_{\text{gen}} + \Delta U_{\text{es}} = -\Delta U_{\text{es}}$ si ha

$$P = \frac{1}{4\pi a^2} \left(-\frac{dU_{\text{tot}}}{da} \right) = \frac{2\pi\epsilon_0 V^2}{4\pi a^2} = \frac{\epsilon_0 V^2}{2a^2}. \quad (9)$$

2

a) Prendendo $x > a$, al di fuori della sfera il campo elettrico e il potenziale sono equivalenti a quelli generati dalla carica reale q più quelli generati da due cariche immagine $q' = -q(a/x)$ posta in $x' = a^2/x$ e $Q - q'$ posta in $x = 0$.

b) Sulla carica q posta a distanza x dal centro della sfera agisce una forza diretta lungo l'asse di simmetria del problema pari a

$$\begin{aligned} F(x) &= k_0 \left[\frac{qq'}{(x-x')^2} + \frac{(Q-q')q}{x^2} \right] = k_0 \left[-\frac{q^2(a/x)}{(x-a^2/x)^2} + \frac{(Q+qa/x)q}{x^2} \right] \\ &= k_0 \left[-\frac{q^2 ax}{(x^2-a^2)^2} + \frac{Qq}{x^2} + \frac{q^2 a}{x^3} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Per x grandi, $F(x) \simeq Qq/x^2 > 0$, quindi la forza è repulsiva. Se invece $x \rightarrow a$, allora $F(x) \rightarrow -\infty$ e quindi $F(x) < 0$ (attrattiva) per x sufficientemente prossimo ad a .

c) Sia $x = d$ la posizione iniziale di q : il lavoro fatto dalle forze del campo per portare q all'infinito vale

$$U_i = \int_d^\infty F(x)dx = k_0 \left[\frac{Qq}{d} - \frac{q^2 a}{2(d^2 - a^2)} + \frac{q^2 a}{2d^2} \right] \quad (11)$$

da confrontare con l'energia elettrostatica che avremmo se tutte le cariche fossero reali

$$U_r = k_0 \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = k_0 \left[\frac{Qq}{d} - \frac{q^2 a}{(d^2 - a^2)} + \frac{q^2 a}{d^2} - \frac{Qq}{a} - \frac{q^2}{d} \right], \quad (12)$$

dove abbiamo posto

$$q_1 = q, \quad q_2 = Q + \frac{a}{d} q, \quad \text{e} \quad q_3 = -\frac{a}{d} q. \quad (13)$$

3

a) Il campo elettrico tra le due armature è determinato solo dalla carica della sfera interna, quindi

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}. \quad (14)$$

Data la resistività ρ non infinita del dielettrico, il sistema è equivalente ad un condensatore di capacità $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r ab/(b - a)$ chiuso su una resistenza di valore

$$R = \int_a^b \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \rho \frac{b - a}{4\pi ab}, \quad (15)$$

quindi con costante temporale di decadimento $\tau = RC = \rho\epsilon_0\epsilon_r$. Alternativamente possiamo usare l'equazione di continuità ottenendo

$$\frac{dQ}{dt} = -\Phi(\mathbf{J}) = - \int \frac{E_r}{\rho} dS = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r \rho r^2} \int dS = - \frac{Q}{\rho\epsilon_0\epsilon_r}. \quad (16)$$

In ogni caso abbiamo

$$Q(t) = Q(0) e^{-t/\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \rho\epsilon_0\epsilon_r. \quad (17)$$

b) Il campo elettrico conserva la simmetria sferica e dal teorema di Gauss abbiamo

$$2\pi r^2 \epsilon_0 (1 + \epsilon_r) E_r = Q, \quad \text{da cui} \quad E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(1 + \epsilon_r) r^2}. \quad (18)$$

Adesso, però, $\mathbf{J}$ scorre solo nel semiguscio sferico contenente il dielettrico, quindi

$$\Phi(\mathbf{J}) = 2\pi r^2 \frac{E_r}{\rho} = \frac{Q}{\rho\epsilon_0(1 + \epsilon_r)}, \quad (19)$$

da cui

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{Q}{\rho\epsilon_0(1 + \epsilon_r)} \quad \text{con} \quad \tau = \rho\epsilon_0(1 + \epsilon_r). \quad (20)$$

c) Poiché nella regione di vuoto non passa corrente, banalmente $\tau = \infty$.

In condizioni stazionarie il campo deve essere nullo all'interno del dielettrico con perdite a causa della resistività finita, quindi $E_r = 0$ per $r > (a + b)/2$. Per $r < (a + b)/2$ abbiamo invece

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (21)$$

da cui otteniamo che per rispettare le condizioni di discontinuità alla superficie di $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, deve essere presente della carica libera con densità superficiale $\sigma = D[r = (a + b)/2]$ all'interfaccia tra vuoto e dielettrico.