

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2 (30/11/2021)

1

Un guscio conduttore sferico, di raggio esterno a e raggio interno $b < a$, è isolato e possiede la carica totale Q .

a) Determinare la distribuzione superficiale di carica e calcolare la forza per unità di superficie.

Una carica puntiforme q (dello stesso segno di Q) viene posta a distanza $\ell > a$ dal centro del guscio.

b) Scrivere la forza tra carica e guscio, mostrando che essa, per diversi valori di ℓ , può essere sia *attrattiva* che *repulsiva*.

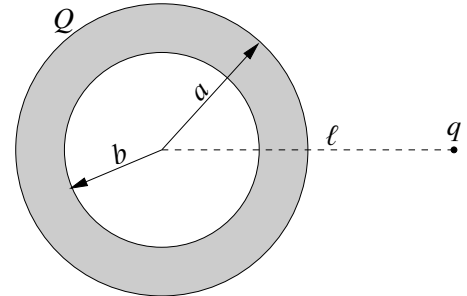


Figura 1:

2

Un cilindro conduttore di raggio $a = 0.05$ m e lunghezza $h = 2$ m possiede inizialmente ($t = 0$) la carica $Q_0 = 10^{-7}$ C ed è immerso esattamente per metà (con asse parallelo alla superficie, così che la linea di galleggiamento coincide con un diametro) in acqua pura avente permittività relativa $\epsilon_r \simeq 80$ e resistività $\rho \simeq 2 \times 10^5 \Omega \cdot \text{m}$. Trascurando gli effetti di bordo, calcolare

a) il campo elettrico (in V/m) alla superficie del cilindro a $t = 0$,

b) la legge temporale e il tempo caratteristico (in s) con cui il cilindro si scarica per $t > 0$.

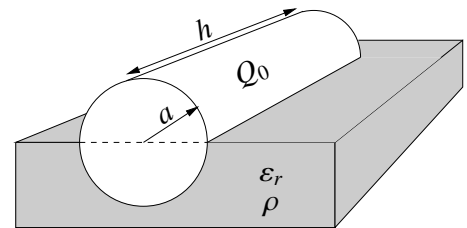


Figura 2:

3

Una particella puntiforme di massa m e carica q si trova in una regione con un campo gravitazionale $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ e un campo magnetico $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{y}}$ entrambi costanti e uniformi.

a) Determinare la velocità $\mathbf{v}_d$ con la quale la particella si muove di moto rettilineo uniforme. Stimare v_d per un protone ($m = 1.7 \times 10^{-27}$ kg) alla superficie terrestre ($B_0 \simeq 5 \times 10^{-5}$ T).

b) Assumendo che a $t = 0$ la velocità $\mathbf{v}(0) = 0$, calcolare $\mathbf{v}(t)$ per $t > 0$ e descrivere la traiettoria, discutendo l'effetto del segno di q .

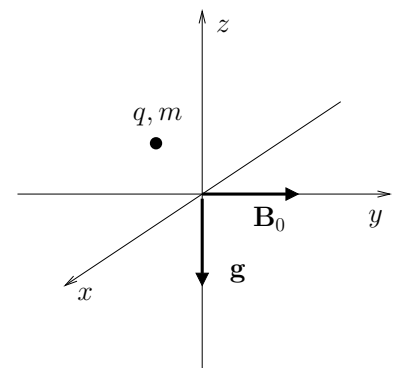


Figura 3:

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} . \quad (1)$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (2)$$

Legge di Ohm microscopica (ρ resistività)

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} \quad (3)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4)$$

Soluzione per il problema di una carica puntiforme q posta a distanza a da una sfera conduttrice di raggio $R < a$ mantenuta a potenziale nullo: si pone una carica immagine $q' = -(R/a)q$ a distanza $b = R^2/a$ dal centro della sfera, lungo la congiungente con la posizione di q .

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{D} \equiv \varepsilon \mathbf{E}) . \quad (5)$$

(per il vuoto $\varepsilon_r = 1$)

SOLUZIONI

1

a) La distribuzione di carica che mantiene il campo elettrico nullo nel volume conduttore corrisponde ad avere la carica Q uniformemente distribuita sulla superficie esterna di raggio a . All'interno di questa superficie non compaiono cariche. Avremo quindi una distribuzione di carica superficiale

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} . \quad (6)$$

Il campo elettrico alla superficie sarà quindi

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{r}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} , \quad (7)$$

($\hat{\mathbf{r}}$ è il versore della coordinata sferica r con origine al centro del guscio) sulla superficie di raggio a , e nullo all'interno della stessa superficie di raggio a . Cioè nullo sia nella cavità di raggio b che nel volume conduttore compreso tra le superfici sferiche di raggi b e a . La forza per unità di superficie sulla superficie carica è

$$P = \frac{\sigma E}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 a^2} , \quad (8)$$

dove il fattore $1/2$ tiene conto della media tra campo immediatamente sotto e immediatamente sopra alla superficie carica.

b)

La struttura interna alla sfera di raggio a è irrilevante ai fini del problema. Sappiamo che, nel caso di una sfera conduttrice di raggio a messa a terra e con una carica q a distanza $\ell > a$ dal centro, il campo elettrico al di fuori della sfera è equivalente a quello generato da q più una carica immagine

$$q' = -\frac{a}{\ell} q \quad (9)$$

posta a distanza

$$\ell' = \frac{a^2}{\ell} \quad (10)$$

dal centro della sfera, come in Fig. 4. Nel nostro caso, sfera isolata con carica Q , per la conservazione della carica dobbiamo porre, oltre alla carica immagine q' , una carica $q'' = -q'$, più una carica Q , ambedue al centro della sfera, come mostrato in Fig. 4. Con questa distribuzione di cariche il campo immediatamente fuori dalla superficie della sfera rimane ortogonale alla superficie stessa.

La forza che agisce su q è quindi

$$f = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q'}{(\ell - \ell')^2} + \frac{Q + q''}{\ell^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{q a \ell}{(\ell^2 - a^2)^2} + \frac{Q\ell + qa}{\ell^3} \right] , \quad (11)$$

ed è attrattiva se $f < 0$, repulsiva se $f > 0$. Quindi il primo termine tra parentesi quadre è attrattivo, il secondo è repulsivo. Per $\ell \rightarrow a^+$ il primo termine diverge, mentre il secondo rimane finito, quindi per q sufficientemente vicina alla sfera, la forza è attrattiva. Al contrario per $\ell \gg a$ abbiamo

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} -\frac{q a \ell}{(\ell^2 - a^2)^2} = -\frac{q a}{\ell^3} , \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{Q\ell + qa}{\ell^3} = \frac{Q}{\ell^2} , \quad (12)$$

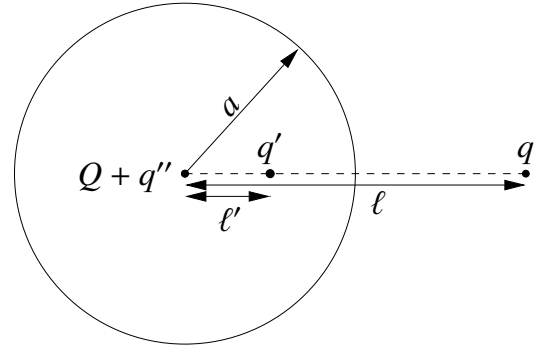


Figura 4:

quindi il termine attrattivo va a zero come $1/\ell^3$, mentre il termine repulsivo va a zero come $1/\ell^2$, ed è quindi dominante.

2

a) Il campo elettrico $\mathbf{E}$ deve essere perpendicolare alla superficie del cilindro, e la componente di $\mathbf{E}$ parallela alla superficie di separazione tra due mezzi deve essere continua. Quindi nella Fig. 5 dobbiamo avere $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$. Alla superficie di un conduttore abbiamo $E = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_r)$, dove σ è la densità superficiale di carica libera, ed ε_r la permittività dielettrica relativa del mezzo a contatto col conduttore. Quindi nel nostro caso dobbiamo avere $\sigma_2 = \varepsilon_r\sigma_1$, dove σ_1 è la densità di carica libera sulla superficie laterale emersa del cilindro e σ_2 quella sulla superficie laterale immersa. Inoltre dobbiamo avere

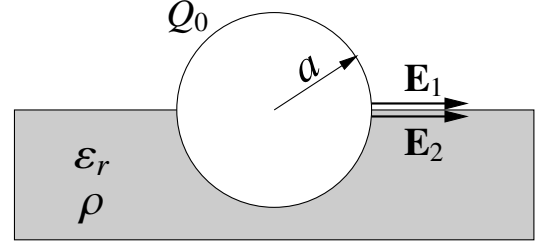


Figura 5:

$$\pi ah(\sigma_1 + \sigma_2) = \pi ah(\varepsilon_r + 1)\sigma_1 = Q_0 , \quad (13)$$

da cui

$$\sigma_1 = \frac{Q_0}{\pi ah(\varepsilon_r + 1)} \quad (14)$$

e

$$\sigma_2 = \varepsilon_r\sigma_1 \quad (15)$$

Per il campo elettrico alla superficie del cilindro abbiamo quindi

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\pi ah\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)} \simeq \frac{3.9 \times 10^{-9}}{8.854 \times 10^{-12}} \simeq 440 \text{ V/m} . \quad (16)$$

b) Molto vicina alla superficie laterale del cilindro, nella parte immersa, all'istante iniziale, abbiamo una densità di corrente

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} = \hat{\mathbf{r}} \frac{Q_0}{\pi ah\rho\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)} , \quad (17)$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ è il versore della coordinata cilindrica r di un sistema con asse coincidente con l'asse del cilindro conduttore. Attraverso una superficie molto vicina (ma esterna) alla superficie laterale immersa passa una corrente iniziale

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J\pi ah = \frac{Q_0}{\rho\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)} \simeq 7.0 \times 10^{-4} \text{ A} . \quad (18)$$

Per la scarica a un istante generico abbiamo quindi l'equazione differenziale

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\rho\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1)} , \quad (19)$$

con soluzione

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} , \quad \text{con} \quad \tau = \rho\varepsilon_0(\varepsilon_r + 1) \simeq 1.4 \times 10^{-4} \text{ s} . \quad (20)$$

3

a) L'equazione del moto è

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0 + m\mathbf{g}, \quad (21)$$

ovvero, in componenti,

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB_0}{m}v_z, \quad (22)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{qB_0}{m}v_x - g. \quad (24)$$

Si ha quindi accelerazione nulla se $v_{z0} = 0$ e $v_{x0} = mg/qB_0 = g/\omega_c \equiv v_d$ dove $\omega_c = qB_0/m$. Notare che il valore di v_{y0} è arbitrario (e rimane costante).

Numericamente per un protone $v_d = mg/qB_0 \simeq 1.0 \times 10^{-8}(g/B_0)$ m/s, da cui $v_d = 2 \times 10^{-3}$ m/s in prossimità della Terra.

b) Senza perdere di generalità possiamo assumere $v_y = 0$ e il moto nel piano xz . Posto $u \equiv v_x + iv_z$ le equazioni sopra possono essere combinate come

$$\frac{du}{dt} = i\omega_c \left(u - \frac{g}{\omega_c} \right) = i\omega_c(u - v_d), \quad (25)$$

che ha soluzione, essendo $u(0) = 0$,

$$u = v_d(1 - e^{i\omega_c t}) \quad (26)$$

ovvero

$$v_x = v_d(1 - \cos \omega_c t), \quad v_z = -v_d \sin \omega_c t. \quad (27)$$

Gli stessi risultati possono essere ottenuti calcolando d^2v_x/dt^2 ed eliminando v_z per ottenere l'equazione di oscillatore armonico con centro di oscillazione a v_d :

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\frac{qB_0}{m} \frac{dv_z}{dt} = -\omega_c^2 v_x + \omega_c g = -\omega_c^2(v_x - v_d). \quad (28)$$

La soluzione generale è

$$v_x(t) = v_d + (v_x(0) - v_d) \cos \omega_c t + \dot{v}_d(0) \sin \omega_c t = v_d(1 - \cos \omega_c t), \quad (29)$$

essendo $v_x(0) = 0$ e, usando l'equazione del moto, $\dot{v}_x(0) = -(qB_0/m)v_z(0) = 0$ dato che $v_z(0) = 0$. Infine

$$v_z(t) = -\frac{m}{qB_0} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\omega_c} \omega_c v_d \sin \omega_c t = -v_d \sin \omega_c t. \quad (30)$$

La traiettoria è la sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme lungo x con velocità $v_d = g/\omega_c$ con un moto circolare uniforme con frequenza ω_c e raggio $r_c = v_d/\omega_c$. Notare che sia il segno di v_d che il verso di girazione dipendono dal segno di q , ovvero cariche opposte migrano in versi opposti dell'asse x .