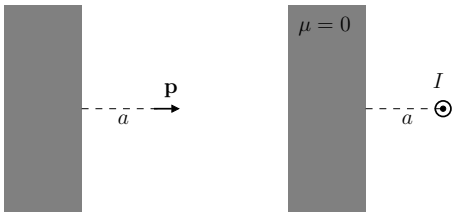
# Corso di Laurea in Fisica
# Anno Accademico 2021-2022

## Compito di Fisica 2 (26/11/2022) – appello straordinario

## 1




**a)** Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è a distanza $a$ dalla superficie piana di un conduttore infinito e perpendicolare alla superficie stessa. Descrivere la soluzione per il campo elettrico in tutto lo spazio. (*7 punti*)
**b)** Si consideri ora un filo infinito percorso dalla corrente continua $I$ e disposto a distanza $a$ dalla superficie piana di un materiale perfettamente diamagnetico ($\mu = 0$), parallelamente alla superficie stessa. Descrivere la soluzione per il campo magnetico in tutto lo spazio. (*8 punti*)

## 2

In due fili infiniti e paralleli posti a distanza $d$ nel sistema $S$ del laboratorio scorrono rispettivamente le intensità di corrente $+I$ e $-I$.

**a)** Calcolare la forza per unità di lunghezza tra i fili. (*5 punti*)

Si consideri ora un sistema di riferimento $S'$ che si muove rispetto a $S$ con velocità $\mathbf{V}$ parallela ai fili. Calcolare in $S'$

**b)** l'intensità di corrente $I'$ e la densità lineare di carica $\lambda'$ sui fili, e i campi magnetico $\mathbf{B}'$ ed elettrico $\mathbf{E}'$, (*5 punti*)

**c)** la forza per unità di lunghezza tra i fili, mostrando che il suo valore è uguale a quello in $S$. (*5 punti*)

## 3

Una particella di carica $q$ e massa $m$ ha velocità iniziale $\hat{\mathbf{v}}_0$ posta nel piano $xy$ e si trova in un campo magnetico uniforme e statico $\hat{\mathbf{B}}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$.
**a)** Assumendo che la particella percorra un'orbita circolare di raggio $a_0$ (da determinare in funzione di $v_0$ e $B_0$) nel piano $xy$, determinare la frequenza $\omega$ della radiazione emessa e la potenza irraggiata $P_r$ trascurando inizialmente la potenza persa per irraggiamento. (*7 punti*)
**b)** Si consideri ora l'effetto dell'irraggiamento per cui la particella perde energia secondo l'equazione $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t = -P_r$ dove $\mathcal{E}$ è l'energia della particella. Calcolare la variazione temporale del raggio dell'orbita $a = a(t)$ (con $a(0) = a_0$) assumendo che l'energia persa per un periodo di rivoluzione sia piccola rispetto all'energia totale, dando a posteriori una condizione di validità dell'ipotesi. (*8 punti*)

**NB** Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

## FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\ . \tag{1}$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica $q$

$$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\ . \tag{2}$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f}=\mathbf{J}\times\mathbf{B}d^3x=Id\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}\ . \tag{3}$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x=\mathbf{J}Sd\ell=Id\boldsymbol{\ell}$.

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2\ . \tag{4}$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu=(A_0,\mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V}=\boldsymbol{\beta}c$

$$A_0'=\gamma(A_0-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{A})\ ,\qquad A_\parallel'=\gamma(A_\parallel-\beta A_0)\ ,\qquad \mathbf{A}_\perp'=\mathbf{A}_\perp\ , \tag{5}$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

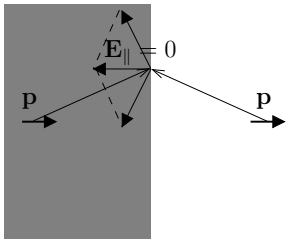
$$E_\parallel'=E_\parallel\,,\qquad E_\perp'=\gamma(E_\perp+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}c)\qquad B_\parallel'=B_\parallel\,,\qquad B_\perp'=\gamma(B_\perp-\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}/c)\,. \tag{6}$$

dove $\mathbf{V}=\boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema $S'$ rispetto al sistema $S$ e "$\parallel$" e "$\perp$" sono riferite a $\mathbf{V}$.

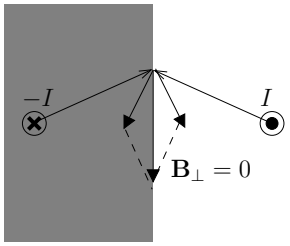
# SOLUZIONI

## 1

**a)**
La soluzione si ottiene col metodo delle immagini ponendo un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ uguale al dipolo reale (quindi parallelo e avente *stesso verso*) in posizione simmetrica rispetto al piano, in modo che la componente di $\mathbf{E}$ parallela alla superficie si annulli. Questo si può anche ottenere modellizzando il dipolo come due cariche puntiformi riconducendosi al problema di una carica davanti a piano conduttore.




**b)**
In questo caso deve annullarsi la componente di $\mathbf{B}$ perpendicolare alla superficie. Questo si ottiene ponendo un filo immagine con corrente *opposta* in posizione simmetrica rispetto al piano. Che le correnti debbano essere opposte è consistente col fatto che il materiale diamagnetico deve respingere il filo.




## 2

**a)** Il campo magnetico generato da un filo a distanza $r$ vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,. \tag{7}$$

La forza tra i due fili vale, per unità di lunghezza,

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = -IB(d) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \tag{8}$$

dove il segno meno indica che la forza è *repulsiva*.
**b)** Dato che $(\lambda/c, I)$ trasforma come un quadrivettore abbiamo per il primo filo

$$I' = \gamma I\,, \qquad \lambda' = -\beta\gamma I/c \tag{9}$$

dove

$$\beta = \frac{V}{c}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{10}$$

Analogamente, il secondo filo ha corrente $-I'$ e densità di carica $-\lambda'$. Il primo filo genera adesso un campo magnetico $\mathbf{B}' = \gamma\mathbf{B}$ e un campo elettrico

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}\,, \tag{11}$$

con cambio di segno per il secondo filo. In alternativa uno può ottenere direttamente i campi dalla trasformazione di $\mathbf{B}$ e da essi le sorgenti.
**c)**
Il termine di forza magnetica è proporzionale a $B'I'$ e risulta quindi

$$\frac{\mathrm{d}F'_B}{\mathrm{d}\ell'} = \gamma^2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell}\,. \tag{12}$$

A questo si aggiunge un termine di forza elettrica *attrattiva* (essendo le cariche opposte),

$$\frac{\mathrm{d}F'_E}{\mathrm{d}\ell'} = \lambda' E'(d) = \beta^2\gamma^2 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} \ . \tag{13}$$

In totale

$$\frac{\mathrm{d}F'_B}{\mathrm{d}\ell'} + \frac{\mathrm{d}F'_E}{\mathrm{d}\ell'} = (-\gamma^2 + \beta^2\gamma^2)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\ell} \tag{14}$$

ovvero la forza tra i due fili per unità di lunghezza è invariante. Se invece si considera la forza su un tratto di filo di lunghezza $\ell$, per effetto della contrazione delle lunghezze la forza aumenta di un fattore $\gamma$.

## 3

**a)** La forza sulla carica è $\mathbf{F} = q\hat{\mathbf{v}} \times \hat{\mathbf{B}}_0$ e (trascurando inizialmente l'irraggiamento) l'energia $U_0 = mv_0^2/2$ si conserva essendo $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{v}} = 0$. Posto $\mathbf{F}$ uguale alla forze centripeta si ha $qv_0B_0 = m\omega^2 a_0 = m\omega v_0$ essendo $v_0 = \omega a_0$ in un moto circolare uniforme. Da qui si ricava $\omega = qB_0/m$ indipendentemente da $a_0$. La carica in moto circolare equivale a un dipolo rotante $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ che si può scrivere

$$\mathbf{p} = qa_0\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\sin\omega t\right) \ , \tag{15}$$

quindi si ha radiazione di dipolo elettrico alla frequenza $\omega$. Essendo poi

$$\ddot{\mathbf{p}} = -qa_0\omega^2\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\omega t + \hat{\mathbf{y}}\sin\omega t\right) \ . \tag{16}$$

per la potenza irraggiata abbiamo

$$P_r = \frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^3}q^2a_0^2\omega^4 \tag{17}$$

che è indipendente dal tempo.
**b)** L'energia totale è uguale all'energia cinetica, ovvero $U = mv^2/2 = m\omega^2a^2/2$ con $\omega$ costante. Supponendo che tutta l'energia persa vada in energia irraggiata abbiamo

$$P_r = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \ , \tag{18}$$

che, combinata con la (16), ci dà

$$m\omega^2 a\,\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{2k_0}{3c^3}q^2a^2\omega^4 \ , \tag{19}$$

dove si è assunto che $a(t)$ vari lentamente in modo da poter usare l'espressione di $P_r$ per un'orbita circolare. Semplificando otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = -\frac{2k_0q^2\omega^2}{3mc^3}\,a = -\frac{a}{\tau} \ , \tag{20}$$

con soluzione $a(t) = a(0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$: il moto è a spirale, con

$$\tau = \frac{3mc^3}{2k_0q^2\omega^2} \ . \tag{21}$$

L'approssimazione usata è valida se $\tau \gg 2\pi/\omega$, cioè se il tempo di spiraleggiamento è molto lungo rispetto al periodo dell'orbita.