

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

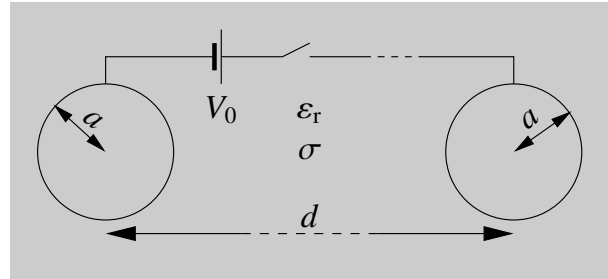
Compito di Fisica 2 (11/11/2023)

1

Due sfere conduttrici identiche di raggio $a = 0.01$ m sono immerse a distanza $d = 1$ m in acqua pura avente permittività relativa $\varepsilon_r \simeq 80$ e conducibilità $\sigma = 5.5 \times 10^{-6}$ S/m (unità SI). Gli effetti di induzione elettrostatica sono trascurabili.

a) Se le sfere sono connesse fra loro attraverso un generatore ideale di d.d.p. $V_0 = 100$ V, calcolare la carica su ciascuna sfera, la corrente che scorre fra le sfere e la resistenza elettrica tra esse.

b) Se le sfere sono sconnesse e hanno a $t = 0$ le cariche $\pm Q_0$, calcolare il tempo di scarica. Si dica anche perché durante la scarica non viene generato campo magnetico nonostante il passaggio di corrente tra le sfere.



2

Una particella di carica q e massa m è legata da un capo di forza centrale $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$.

a) Assumendo che la particella percorra un'orbita circolare di raggio a nel piano xy , determinare la frequenza ω della radiazione emessa e la potenza irradiata P_r .

b) Per effetto dell'irraggiamento la carica perde energia: calcolare la variazione temporale del raggio dell'orbita $a = a(t)$ (con $a(0) = a_0$) assumendo che l'energia persa per un periodo di rivoluzione sia piccola rispetto all'energia totale (si dia a posteriori una condizione di validità dell'ipotesi).

3

Nel sistema S del laboratorio esistono un campo elettrico $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ e un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, entrambi uniformi e costanti, e vale $Bc > E$.

a) Si determini la velocità di un sistema S' in moto uniforme rispetto a S tale che in S' il campo elettrico $\mathbf{E}' = 0$.

b) Data una particella di carica q e massa m avente a $t = 0$ velocità nulla in S , si determini la sua legge del moto per $t > 0$ assumendo $Bc \gg E$ e dando i risultati al primo ordine in E/Bc .

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} , \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \quad (1)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (3)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4)$$

Legge di Ohm “microscopica” per un materiale di conducibilità σ

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} . \quad (5)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (6)$$

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x , \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c) , \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c) , \quad (7)$$

$$B'_x = B_x , \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c) , \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) . \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) Per simmetria i potenziali delle sfere sono $\pm V_0/2$. Trascurando l'induzione elettrostatica le sfere hanno cariche $\pm Q$ uniformemente distribuite sulle loro superfici, che generano al loro esterno rispettivamente i potenziali

$$\Phi_{\pm}(r_{\pm}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\pm Q}{r_{\pm}} , \quad (9)$$

con $r_{\pm}$ le distanze dai centri delle due sfere. Trascurando i potenziali generati da una sfera sull'altra e posto $\Phi_{\pm}(a) = \pm V_0/2$ si ottiene

$$Q = 2\pi\epsilon a V_0 . \quad (10)$$

Per $V_0 = 100$ V si ha $Q = 4.5 \times 10^{-9}$ C.

Considerando una qualunque superficie S che racchiuda, per esempio, la sfera con carica Q , l'intensità di corrente uscente dalla sfera è

$$I = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \frac{Q}{\epsilon} , \quad (11)$$

dove si è usato il teorema di Gauss. Inserendo la (10) otteniamo $I = 2\pi a \sigma V_0$, da cui

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi a \sigma} = 2.9 \times 10^6 \text{ Ohm} . \quad (12)$$

b) L'evoluzione della carica sulle sfere è data dall'equazione di continuità

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\sigma \frac{Q}{\epsilon} , \quad (13)$$

da cui otteniamo $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ con

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} = 1.3 \times 10^{-4} \text{ s} \quad (14)$$

D'altra parte abbiamo anche per il campo elettrico $\partial_t \mathbf{E} = -\mathbf{E}/\tau$, quindi per il rotore del campo magnetico si ha

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon \partial_t \mathbf{E}) = \mu_0(\sigma - \sigma)\mathbf{E} = 0 , \quad (15)$$

ed il campo magnetico è nullo perché la corrente di conduzione è cancellata dalla corrente di spostamento.

2

a) Per una forza centrale armonica abbiamo $\omega = \omega_0$ indipendentemente da a . L'orbita viene percorsa a velocità $v = a\omega_0$. Il momento di dipolo $\mathbf{p}$ vale

$$\mathbf{p} = qa (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) , \quad \text{con derivata seconda} \quad \ddot{\mathbf{p}} = -qa\omega_0^2 (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) . \quad (16)$$

Per la potenza irradiata abbiamo

$$P_r = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 \quad (17)$$

che è indipendente dal tempo.

b) L'energia totale è la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, che sono uguali

$$U = U_{\text{pot}} + K = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 = m \omega_0^2 a^2 . \quad (18)$$

Supponendo che tutta l'energia persa vada in energia irradiata abbiamo

$$P_r = -\frac{dU}{dt} , \quad (19)$$

che, combinata con la (17), ci dà

$$2m\omega_0^2 a \frac{da}{dt} = -\frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 , \quad \text{ovvero} \quad \frac{da}{dt} = -\frac{k_0 q^2 \omega_0^2}{3mc^3} a = -\frac{a}{\tau} , \quad (20)$$

con soluzione $a(t) = a(0) e^{-t/\tau}$: il moto è a spirale, con

$$\tau = \frac{3mc^3}{k_0 q^2 \omega_0^2} . \quad (21)$$

L'approssimazione usata è valida se $\tau \gg 2\pi/\omega_0$, cioè se il tempo di spiraleggiamento è molto lungo rispetto al periodo dell'orbita.

3

a) Applicando le trasformazioni relativistiche del campo elettromagnetico il campo elettrico è nullo nel sistema S' che si muove con velocità $\mathbf{v} = (E/B)\hat{\mathbf{x}}$ rispetto al sistema S del laboratorio

$$E'_y = \gamma(v)(E_y - vB_z) = \gamma(v) \left(E - \frac{E}{B} B \right) = 0 , \quad (22)$$

dove la condizione $v < c$ garantisce l'esistenza di un sistema dove $E'_y = 0$.

b) In S' la particella compie un'orbita circolare con frequenza $\omega_c = qB/m$ (al primo ordine in v/c si ha $\gamma = 1$ e $B'_z = B_z$) e raggio v/ω (la velocità iniziale della particella in S' è $-\vec{v}$). Tornando nel sistema S del laboratorio dobbiamo sommare alla velocità in S' la velocità della trasformazione (cambiata di segno). La traiettoria risultante è una cicloide (sovrapposizione di di moto circolare uniforme con un moto di traslazione uniforme a velocità nello stesso piano del cerchio).