

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2012-2013

Compito di Fisica 2 (12/12/12)

1

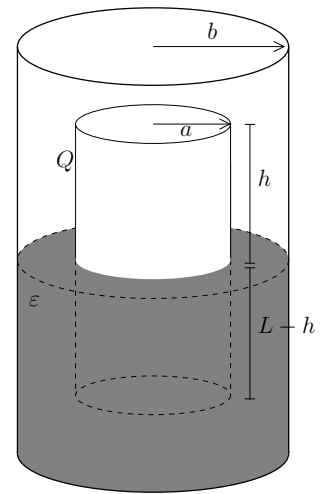
Un cilindro conduttore di raggio a e altezza $L \gg a$ è immerso per un tratto $L - h$ (con $h \gg a$) in un liquido dielettrico di permittività elettrica ϵ . Sul cilindro si trova la carica libera Q . Gli effetti al bordo sono trascurabili e la densità del cilindro ed eventuali vincoli meccanici sono tali che il moto è solo verticale.

a) Calcolare il campo elettrico E_a alla superficie del cilindro e la densità di carica superficiale, sia sulla superficie a contatto col dielettrico (nel tratto inferiore di lunghezza $L - h$) che sulla superficie a contatto con la regione di vuoto (nel tratto superiore di lunghezza h).

b) Calcolare il campo elettrico nella regione tra la superficie del cilindro e quella del contenitore esterno ($a < r < b$).

c) Determinare il verso delle forze elettrostatiche agenti sul cilindro, ovvero se esse tendono a farlo emergere o immergere rispetto alla superficie del liquido.

d) (*Facoltativo*) Spiegare come determinare la posizione d'equilibrio del cilindro tenendo conto della spinta di Archimede (supponendo note la massa M del cilindro e la densità ρ del liquido).



2

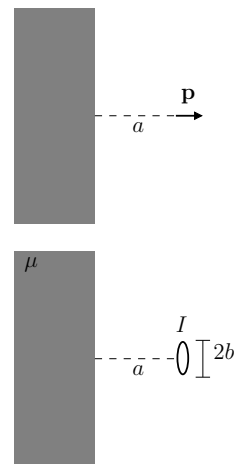
Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è posto a distanza a dalla superficie piana di un mezzo conduttore infinito, perpendicolarmente alla superficie stessa.

a) Descrivere la soluzione per il campo elettrico in tutto lo spazio e determinare il verso della forza tra dipolo e piano.

Si consideri ora una spira di raggio b , nella quale è mantenuta la corrente continua I , posta a distanza $a \gg b$ dalla superficie piana di un mezzo infinito di permeabilità magnetica μ , parallelamente alla superficie stessa.

b) Assumendo che il mezzo sia un diamagnete perfetto con $\mu = 0$, ovvero che il campo magnetico $\mathbf{B}$ sia rigorosamente nullo al suo interno, descrivere la soluzione per il campo magnetico in tutto lo spazio e determinare il verso della forza tra spira e piano.

c) Rispondere di nuovo alla domanda **b)** nel caso di un materiale paramagnetico con $\mu_r \simeq 10^3 \gg 1$ (suggerimento: si può considerare approssimativamente $\mathbf{H} = 0$ nel materiale, giustificando adeguatamente tale approssimazione).



3

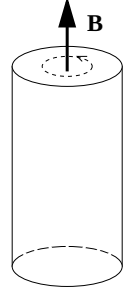
Un cilindro conduttore di raggio a e altezza $h \gg a$ è mantenuto in rotazione intorno al proprio asse con velocità angolare ω , in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}$ parallelo a ω .

a) Assumendo $\omega = 2\pi \times 10^2 \text{ s}^{-1}$ e $B = 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ (intensità del campo magnetico terrestre), valutare, nella forza sugli elettroni di conduzione, il rapporto tra il termine centrifugo e il termine dovuto al campo magnetico.

Assunte condizioni stazionarie, calcolare

b) il campo elettrico nel cilindro e le densità di carica di volume e superficie,

c) il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ sull'asse del cilindro dovuto alle correnti generate dalla rotazione, valutandone l'intensità in rapporto a $\mathbf{B}$ (assumendo $a \simeq 0.1 \text{ m}$).



Punteggio: ogni domanda vale **5 punti** (eccetto la parte facoltativa **1 d)** che vale 3)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi isotropi con permeabilità dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (1)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi isotropi con permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{lib}} , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (2)$$

Energia elettrostatica

$$U_{\text{es}} = \int \frac{\varepsilon}{2} |\mathbf{E}|^2 d^3x . \quad (3)$$

Operatori divergenza e rotore in coordinate cilindriche

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \partial_r (r V_r) + \frac{1}{r} \partial_\phi V_\phi + \partial_z V_z , \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi \right) + \hat{\phi} (\partial_z V_r - \partial_r V_z) + \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{r} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r) . \quad (5)$$

Costanti fisiche

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} , \quad e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} , \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} . \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Trattandosi di un conduttore carico e trascurando gli effetti al bordo, il campo elettrico risulta normale alla superficie laterale del cilindro e continuo alla superficie di separazione tra vuoto e dielettrico (superficie perpendicolare all'asse del cilindro e situata ad altezza $L - h$), essendo il campo parallelo alla superficie stessa. Indicando con σ_1 e σ_2 le densità superficiali di carica libera rispettivamente sulla superficie laterale del cilindro a contatto col vuoto e su quella a contatto col dielettrico, valgono le relazioni

$$\varepsilon_0 E_a = \sigma_1, \quad \varepsilon_r \varepsilon_0 E_a = \sigma_2, \quad \sigma_1 h + \sigma_2 (L - h) = Q / (2\pi a), \quad (7)$$

(dove $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$) da cui si ricava

$$E_a = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 a [(1 - \varepsilon_r)h + \varepsilon_r L]}. \quad (8)$$

b) Per il teorema di Gauss applicato a una superficie cilindrica coassiale al conduttore, di raggio r tale che $a < r < b$ si ha

$$2\pi r L E(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{\varepsilon_0}, \quad (9)$$

dove Q_{tot} è la carica totale sulla superficie del cilindro, che comprende sia la carica libera che quella di polarizzazione. Per $r \rightarrow a^+$ si ha $2\pi a L E_a = Q_{\text{tot}} / \varepsilon_0$ per cui si può scrivere

$$E(r) = E_a \frac{a}{r} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 r [(1 - \varepsilon_r)h + \varepsilon_r L]}. \quad (10)$$

c) L'energia elettrostatica del sistema è data dall'integrale

$$\begin{aligned} U_{\text{es}} &= \int \frac{\varepsilon(z)}{2} E^2(r) dV \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\int_a^b E^2(r) 2\pi r dr \right) [h + \varepsilon_r (L - h)] \\ &= \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{(1 - \varepsilon_r)h + \varepsilon_r L} \int_a^b \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{(1 - \varepsilon_r)h + \varepsilon_r L} \ln \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (11)$$

e quindi la sua variazione rispetto a h , cambiata di segno, dà la forza in direzione parallela all'asse del cilindro

$$-\frac{dU_{\text{es}}}{dh} \propto -\frac{\varepsilon_r - 1}{[(1 - \varepsilon_r)h + \varepsilon_r L]^2} < 0. \quad (12)$$

Il segno negativo (si ricordi che $\varepsilon_r > 1$) indica che le forze elettrostatiche tendono a far diminuire h , ovvero a far immergere il cilindro nel liquido dielettrico.

d) La variazione di energia gravitazionale per uno spostamento verticale dh è

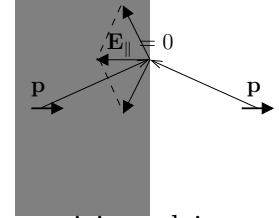
$$dU_g = Mg dh - \rho g (L - h) \pi a^2 dh, \quad (13)$$

dove ρ è la densità del liquido. Posto $dU_g + dU_{\text{es}} = 0$ si trova la posizione di equilibrio risolvendo un'equazione di terzo grado in h .

2

a)

La soluzione si ottiene col metodo delle immagini ponendo un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ uguale al dipolo reale (quindi parallelo e avente *lo stesso verso*) in posizione simmetrica rispetto al piano, in modo che la componente di $\mathbf{E}$ parallela alla superficie si annulli. La forza tra due dipoli paralleli è attrattiva (come si può dedurre anche da considerazioni elementari) e quindi il dipolo viene attratto dal piano conduttore.



Il campo elettrico nel conduttore è nullo, mentre all'esterno è dato dalla sovrapposizione dei campi del dipolo elettrico reale e della sua immagine. Usando l'espressione generale per la forza tra due dipoli elettrici posti a distanza $R\hat{\mathbf{r}}$ con $R = 2a$

$$\mathbf{F} = \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} [3(\mathbf{p}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{p}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2] \right], \quad (14)$$

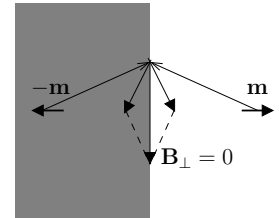
otteniamo per il caso in questione ($\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p} = p\hat{\mathbf{r}}$)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left[\frac{2p^2}{R^3} \right] \quad \text{da cui} \quad F = \frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 a^4}. \quad (15)$$

diretta in modo da attrarre il dipolo elettrico verso il piano conduttore.

b)

Poiché $\mathbf{B} = 0$ all'interno del diamagnete perfetto e la componente perpendicolare di $\mathbf{B}$ ad una superficie di discontinuità è continua, segue che sulla superficie $\mathbf{B}_\perp = 0$. Ponendo una spira immagine delle stesse dimensioni di quella reale ma percorsa da corrente circolante in verso *opposto*, si vede che le componenti perpendicolari alla superficie si elidono sulla superficie stessa. Per visualizzare meglio la situazione si può, nel limite $a \gg b$, approssimare la spira come un dipolo, il cui campo magnetico è ortogonale al raggio vettore. Poiché correnti dirette in verso opposto (o, alternativamente, dipoli magnetici *antiparalleli*) si respingono, la forza tra spira e piano è repulsiva.



Il campo magnetico nel mezzo è nullo, mentre all'esterno è dato dalla sovrapposizione dei campi del dipolo magnetico (della spira) reale e della sua immagine.

Usando l'espressione generale per la forza tra due dipoli magnetici¹ posti a distanza $R\hat{\mathbf{r}}$ con $R = 2a$

$$\mathbf{F} = \nabla \left[\frac{\mu_0}{4\pi R^3} [3(\mathbf{m}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2] \right], \quad (16)$$

otteniamo per il caso in questione ($\mathbf{m}_1 = -\mathbf{m}_2 = m\hat{\mathbf{r}}$ con $m = I\pi b^2$)

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left[\frac{-2m^2}{R^3} \right] \quad \text{da cui} \quad F = -\frac{3\mu_0 m^2}{32\pi a^4}. \quad (17)$$

diretta in modo da allontanare il dipolo magnetico dal mezzo.

c) Nel limite $\mu_r \rightarrow \infty$, nel materiale si può prendere $\mathbf{H} \simeq 0$ (affinché $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, con $\mu = \mu_0\mu_r$, abbia valore finito) e quindi, per la continuità della componente tangenziale di $\mathbf{H}$, alla superficie risulta

¹Cfr. *Problemi di Elettromagnetismo Classico*, Edizioni PLUS, pag. 137.

$\mathbf{H}_{\parallel} = 0$. Dato che nel limite $a \gg b$ la spira si può approssimare con un dipolo magnetico, il problema diviene analogo a quello del punto **a)** (l'espressione del campo e le condizioni al bordo sono le stesse per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ nei rispettivi casi) ed è quindi risolto ponendo un dipolo immagine uguale a quello reale. Poiché dipoli *paralleli* si attraggono, la forza tra dipolo e piano è attrattiva.

3

a) Le forze centrifuga ($\mathbf{F}_c$) e magnetica ($\mathbf{F}_m$) a distanza r dall'asse sono date, in coordinate cilindriche, da

$$\mathbf{F}_c = m_e \omega^2 \mathbf{r} , \quad \mathbf{F}_m = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} = -e \omega B \mathbf{r} , \quad \frac{F_c}{F_m} = \frac{\omega}{eB/m_e} \sim 7.2 \times 10^{-5} . \quad (18)$$

Il termine magnetico è dunque dominante: perciò da qui in avanti trascureremo la forza centrifuga.

b) In condizioni stazionarie deve generarsi un campo elettrostatico tale da bilanciare l'effetto della forza magnetica, quindi

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\omega B \mathbf{r} . \quad (19)$$

Questo campo è generato da una densità uniforme di carica

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{2\varepsilon_0}{r} E(r) = -2\varepsilon_0 \omega B . \quad (20)$$

Poiché il cilindro è elettricamente neutro, sulla sua superficie si trova una densità di carica superficiale data da

$$\sigma = -\frac{\pi a^2 h \rho}{2\pi a h} = -\frac{\rho a}{2} = \varepsilon_0 \omega B a . \quad (21)$$

c) Per effetto della rotazione si ha una distribuzione di corrente $\mathbf{j} = \rho \omega r \hat{\phi}$. Il campo magnetico può essere calcolato dividendo tale distribuzione in una serie di solenoidi di raggio r compreso tra 0 e a , nei quali scorre la corrente superficiale $d\iota = j dr$; ogni solenoide genera quindi per $r' < r$ il campo $dB = \mu_0 d\iota$. Occorre poi aggiungere il contributo della corrente $\iota_s = \sigma \omega a$ sulla superficie esterna del cilindro. Quindi

$$B_1(r) = \int_r^a \mu_0 d\iota + \mu_0 \iota_s = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 B \left(\int_r^a 2r' dr' - a^2 \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 B r^2 , \quad (22)$$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \simeq (2, 1 \times 10^{-7})^2 \ll 1 . \quad (23)$$