

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2014-2015

Compito di Fisica 2 (01/12/2014)

1

Una sfera conduttrice di raggio a si trova a distanza $d \gg a$ (misurata dal centro della sfera) da un piano conduttore infinito, come in Fig. 1. La sfera è isolata e su di essa si trova la carica Q . Mediante il metodo delle cariche immagine si dia la soluzione del problema del potenziale e si calcoli la forza sulla sfera

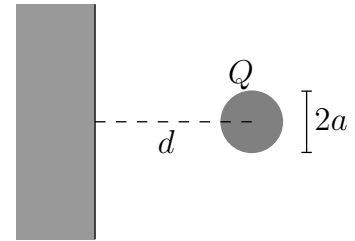


Figura 1

- a) trascurando gli effetti di induzione del piano sulla sfera, ovvero all'ordine zero in a/d ,
b) considerando gli effetti di induzione al primo ordine in a/d .

2

Un condensatore piano avente armature quadrate di lato a poste a distanza $h \ll a$ è riempito di due lastre di materiali dielettrici differenti, aventi permeabilità ε_1 e $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, come in figura. La superficie di contatto tra le due lastre si trova in posizione x . Sulle due armature si trovano le cariche $\pm Q$ rispettivamente.

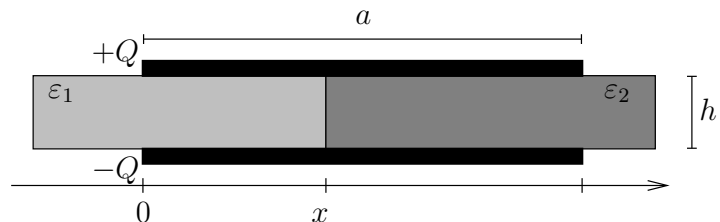


Figura 2

- a) Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore, trascurando gli effetti di bordo.
b) Determinare la forza che tende a spostare le due lastre di dielettrico.

3

Un lungo cilindro conduttore di lunghezza ℓ e raggio $a \ll \ell$ possiede una densità di carica lineare λ . Il cilindro viene immerso in un liquido avente permittività dielettrica ε . Nel seguito si trascurino gli effetti di bordo.

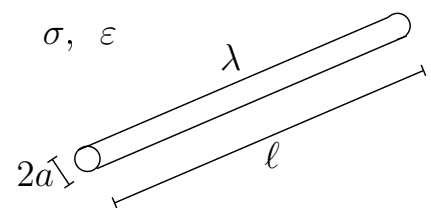


Figura 3

- a) Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.
b) Se il liquido ha anche conducibilità σ , calcolarne il tempo di scarica.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni dell'elettrostatica per mezzi con permittività dielettrica ε :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{D} \equiv (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \varepsilon \mathbf{E} . \quad (1)$$

Energia elettrostatica per un mezzo dielettrico

$$U_{\text{es}} = \int \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E}^2 d^3x . \quad (2)$$

Soluzione del problema della carica q a distanza d dal centro di una sfera conduttrice di raggio a messa a terra; si pone una carica immagine q' a distanza d' dal centro, con

$$q' = -(a/d)q , \quad d' = a^2/d . \quad (3)$$

Equazione di continuità per la corrente e legge di conservazione della carica per un volume $\mathcal{V}$ racchiuso dalla superficie $\mathcal{S}$

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} , \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} . \quad (4)$$

Legge di Ohm (ρ resistività, σ conducibilità)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{E}/\rho . \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a) Se trascuriamo gli effetti di induzione del piano sulla sfera possiamo considerare la carica Q come distribuita uniformemente sulla sfera stessa. La sfera quindi genera un campo equivalente a quello di una carica puntiforme $q = Q$ posta al suo centro. Per mantenere equipotenziale il piano dobbiamo porre una carica $-q$ a distanza d a sinistra del piano stesso, come in Fig. 4. La forza attrattiva all'ordine 0 tra piano e sfera vale quindi

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4d^2}. \quad (6)$$

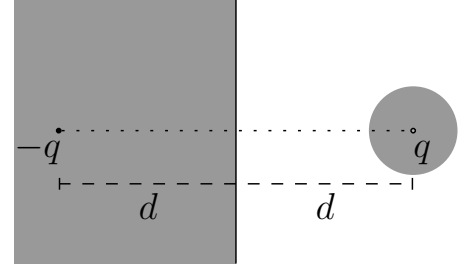


Figura 4

b) A questo punto la configurazione di cariche puntiformi ipotizzata non mantiene equipotenziale la superficie della sfera. Si può ovviare ponendo dentro alla sfera stessa una carica q' immagine di $-q$, e pari a

$$q' = \frac{a}{2d} q = \frac{a}{2d} Q, \quad (7)$$

posta a una distanza $x' = a^2/(2d)$ dal centro della sfera, e quindi a una distanza

$$d' = d - x' = d - \frac{a^2}{2d} = \frac{2d^2 - a^2}{2d} \quad (8)$$

a destra del piano, come in Fig. 5. D'altra parte la carica complessiva della sfera deve valere Q , quindi dovremo aggiungere una carica $-q'$ al centro, e la carica q al centro della sfera adesso varrà

$$q = Q - q' = Q - \frac{a}{2d} Q = \frac{2d - a}{2d} Q. \quad (9)$$

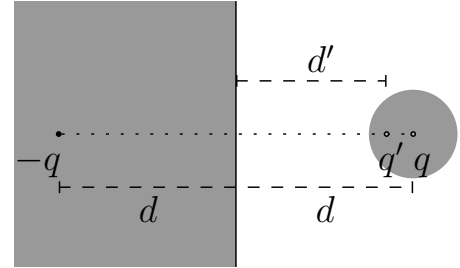


Figura 5

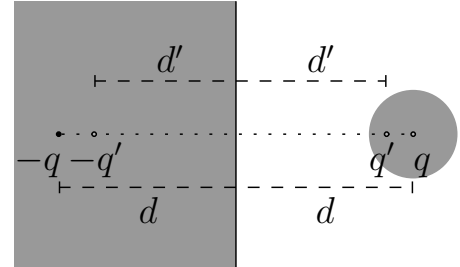


Figura 6

Adesso è il piano a non essere più equipotenziale. Il passo successivo è quindi: i) “aggiornare” la carica $-q$ con il valore della (9), e ii) porre l'immagine $-q'$ di q' a distanza d' a sinistra del piano, come in Fig. 6. Qui ci fermiamo, perché il passo successivo sarebbe rendere equipotenziale la superficie della sfera, ponendo al suo interno l'immagine q'' di $-q'$. Ma la carica q'' sarebbe dell'ordine di $(a/d)^2 Q$, al di sotto del limite di approssimazione che ci siamo posti. Trascurando i termini di ordine superiore al primo in a/d (cioè l'interazione tra q' e $-q'$, e quelle coinvolgenti le immagini agli ordini superiori) la forza attrattiva tra piano e sfera vale così

$$\begin{aligned} F &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(Q - q')^2}{(2d)^2} + 2 \frac{(Q - q') q'}{(2d - x')^2} \right] \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q^2}{(2d)^2} - 2 \frac{Qq'}{(2d)^2} + 2 \frac{Qq'}{(2d - x')^2} \right] \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q^2}{(2d)^2} - 2 \frac{Qq'}{(2d)^2} + 2Qq' \left(\frac{1}{(2d)^2} + \frac{2x'}{(2d)^3} \right) \right] \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{4d^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

dove abbiamo usato lo sviluppo al primo ordine $\frac{1}{(2d-x')^2} \simeq \frac{1}{(2d)^2} + \frac{2x'}{(2d)^3}$. E' importante notare che i termini in q'^2 e $q'x'$ *devono essere trascurati*, perché sono dello stesso ordine dei termini in Qq'' che comparirebbero sviluppando le immagini al secondo ordine in a/d . Non compaiono quindi correzioni al primo ordine per la forza tra sfera e piano.

2

a) Trascurando gli effetti ai bordi il condensatore ha una capacità, in funzione di x , pari a

$$C(x) = \varepsilon_1 \frac{ax}{h} + \varepsilon_2 \frac{a(a-x)}{h} = \frac{a[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x + a\varepsilon_2]}{h}. \quad (11)$$

Con una carica Q la differenza di potenziale vale

$$V(x) = \frac{Q}{C} = \frac{Qh}{a[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x + a\varepsilon_2]}, \quad (12)$$

da cui otteniamo per il campo elettrico

$$E(x) = \frac{V(x)}{h} = \frac{Q}{hC} = \frac{Q}{a[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x + a\varepsilon_2]}. \quad (13)$$

Notare che, nelle nostre approssimazioni, il campo elettrico è perpendicolare alle armature, diretto dall'armatura con carica positiva a quella con carica negativa, e ha lo stesso valore nei due mezzi.

b) L'energia del condensatore vale

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 h}{a[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x + a\varepsilon_2]}, \quad (14)$$

ed essendo il condensatore isolato abbiamo per la forza che tende a spostare le due lastre

$$F = -\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 h}{a} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x + a\varepsilon_2]^2}, \quad (15)$$

positiva se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, negativa altrimenti (e quindi negativa nell'ipotesi del problema).

3

a) Nelle ipotesi del problema e per ragioni di simmetria, il campo elettrico in tutto lo spazio avrà direzione radiale rispetto all'asse del cilindro: $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. All'interno del conduttore il campo elettrico è nullo. All'esterno, per $r \geq a$, l'intensità del campo, dipendente solo da r , si determina applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica coassiale al cilindro conduttore, di raggio r e altezza ℓ . Avremo così:

$$2\pi r \ell E(r) = \frac{1}{\varepsilon} \lambda \ell \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon}. \quad (16)$$

b) Se il liquido ha conducibilità σ , all'esterno del conduttore scorre una corrente radiale che, per la legge di Ohm, è data da $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Trascurando gli effetti di bordo, il tempo caratteristico di scarica

del conduttore può essere determinato calcolando l'intensità di corrente attraverso una superficie cilindrica chiusa di raggio a e altezza ℓ che circonda il conduttore ed è ad esso coassiale:

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \sigma E(a) 2\pi a \ell = \frac{\sigma}{\epsilon} \lambda \ell \quad (17)$$

e facendo ricorso all'equazione di conservazione della carica:

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\frac{\sigma}{\epsilon} \lambda \ell \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \lambda \ell e^{-t/\tau} . \quad (18)$$

Il tempo caratteristico è dunque: $\tau = \epsilon/\sigma$.