

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (02/12/2015)

1

Per ciascuna delle configurazioni di cariche puntiformi e conduttori illustrate rispettivamente in Fig.1a e Fig.1b e descritte nel seguito, si dia la configurazione di cariche immagine che risolve il problema del potenziale e si determini la carica totale indotta sul conduttore (si ricordi che un conduttore infinito è a potenziale nullo).

a) La superficie di un conduttore infinito presenta un rigonfiamento semisferico di raggio R . A distanza a dal punto O si trova una carica q (Fig.1a). (7 punti)

b) Una cavità semisferica di raggio R si trova all'interno di un conduttore infinito. A distanza b dal punto O si trova una carica q (Fig.1b). (4 punti)

(Nota: in Fig.1a è illustrato il caso in cui l'angolo $\theta = \pi/2$ ovvero la carica q si trova sull'asse di simmetria del sistema; è facoltativo dare la soluzione per il caso con $\theta \neq \pi/2$ cioè con la carica *non* sull'asse di simmetria.)

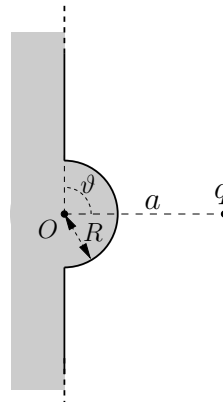


Fig. 1a

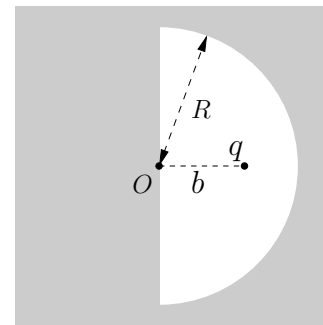


Fig. 1b

2

Una lastra piana di materiale dielettrico con permeabilità ϵ , avente spessore h e superficie $S \gg h^2$, è posta a contatto con un conduttore sulla cui superficie si trova la densità di carica libera superficiale σ . Gli effetti di bordo sono trascurabili (approssimazione di lastra infinita).



Determinare

a) il campo elettrico in tutto lo spazio, (4 punti)

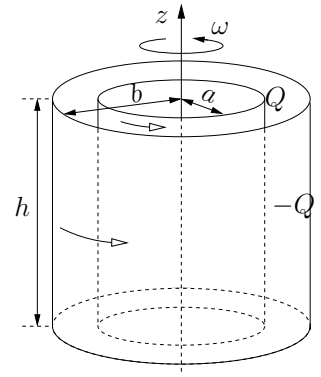
b) le densità di carica di polarizzazione sulle superfici del dielettrico. (4 punti)

c) Si dica come cambiano i campi se il dielettrico viene staccato di s ($< h$) dalla superficie del conduttore. Si dica anche se l'energia elettrostatica del sistema varia con s e se c'è una forza totale sul dielettrico. (5 punti)

3

Sulle armature di un condensatore cilindrico isolato (raggi delle armature a e $b > a$, altezza $h \gg b$) si trovano le cariche $\pm Q$. Il condensatore viene messo in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare $\omega = 2\pi/T$. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

- a) Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ generato in tutto lo spazio. (6 punti)
b) A causa di $\mathbf{B}$ le cariche sulle superfici rotanti risentono di un termine di forza magnetica in aggiunta di quello dovuto al campo elettrico $\mathbf{E}$. Calcolare il segno relativo e il rapporto tra i moduli dei termini magnetico ed elettrico. (6 punti)



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (1)$$

Soluzione per il problema di una carica puntiforme q posta a distanza a da una sfera conduttrice di raggio $R < a$ mantenuta a potenziale nullo: si pone una carica immagine $q' = -(R/a)q$ a distanza $b = R^2/a$ dal centro della sfera, lungo la congiungente con la posizione di q .

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε senza cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{pol}}) , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (2)$$

Equazioni della magnetostatica

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} . \quad (3)$$

Campo in un solenoide infinito orientato lungo l'asse z , avente n spire per unità di lunghezza nelle quali scorre l'intensità di corrente I

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} . \quad (4)$$

SOLUZIONI

1

a) Scegliamo un riferimento cartesiano in cui l'origine coincide con il centro della semisfera. Orientiamo gli assi in modo che l'asse $\hat{y}$ sia perpendicolare al piano conduttore e la proiezione del punto occupato dalla carica reale q sul piano conduttore appartenga all'asse $\hat{x}$: indicando con θ l'angolo formato dal vettore-posizione della carica e l'asse $\hat{x}$, abbiamo che la carica si trova in $(a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$, con $a > R$.

La superficie del piano conduttore con il rigonfiamento è una superficie equipotenziale a potenziale nullo. Sappiamo che in presenza del solo piano conduttore il problema si risolve collocando una carica immagine $q_1 = -q$ in $(a \cos \theta, -a \sin \theta, 0)$. In presenza di una sfera conduttrice a potenziale nullo, la soluzione si ottiene collocando una carica immagine $q_2 = -(R/a)q$ all'interno della sfera in posizione $(a' \cos \theta, a' \sin \theta, 0)$, con $a' = R^2/a < R$.

Se nel problema presente introduciamo sia q_1 che q_2 come definite sopra, abbiamo che il potenziale totale $V(\mathbf{r}) = V_q(\mathbf{r}) + V_{q_1}(\mathbf{r}) + V_{q_2}(\mathbf{r})$ non è nullo né sul piano dove è uguale a $V_{q_2}(\mathbf{r})$ (essendo sul piano $V_q(\mathbf{r}) + V_{q_1}(\mathbf{r}) = 0$), né sulla sfera dove è uguale a $V_{q_1}(\mathbf{r})$ (essendo sulla sfera $V_q(\mathbf{r}) + V_{q_2}(\mathbf{r}) = 0$). Occorre allora introdurre altre cariche immagine che "bilancino" il potenziale generato da q_2 sul piano e da q_1 sulla sfera. Il problema si risolve introducendo una terza carica $q_3 = (R/a)q$ in posizione $(a' \cos \theta, -a' \sin \theta, 0)$, simmetrica a q_2 rispetto al piano e ad essa opposta ($q_3 = -q_2$) e il cui potenziale cancella il contributo di q_1 sulla sfera ($q_3 = -(R/a)q_1$).

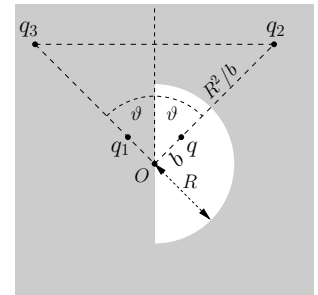
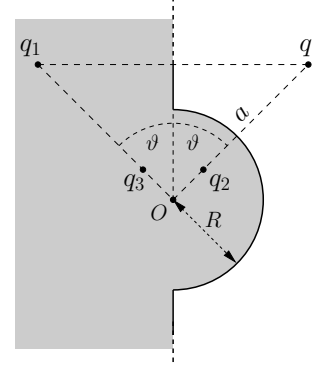
Per il teorema di Gauss, la carica totale indotta sul conduttore è uguale alla somma delle cariche immagine:

$$q_{\text{ind}} = q_1 + q_2 + q_3 = -q + \left(-\frac{R}{a}q\right) + \left(\frac{R}{a}q\right) = -q. \quad (5)$$

Può essere interessante notare che, essendo il campo elettrico generato dalle quattro cariche sempre perpendicolare alla superficie del conduttore, sulla circonferenza della semisfera che aderisce al piano conduttore ($y = 0, x^2 + z^2 = R^2$) il campo elettrico è nullo.

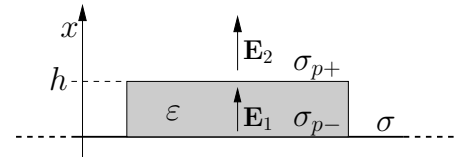
b) Se la carica q è collocata all'interno della semisfera, in posizione $(b \cos \theta, b \sin \theta, 0)$, con $b < R$, questo problema si risolve in modo simile al precedente.

Collochiamo tre cariche immagine nello spazio esterno alla semisfera: $q_1 = -q$ in $(b \cos \theta, -b \sin \theta, 0)$, $q_2 = -(R/b)q$ in $(b' \cos \theta, b' \sin \theta, 0)$, con $b' = R^2/b > R$, e $q_3 = -q_2$ in $(b' \cos \theta, -b' \sin \theta, 0)$. La carica indotta sulla superficie della semisfera è $-q$ come nel caso precedente.



2

a) In base alle approssimazioni date, i campi elettrici sono normali alla superficie della lastra, perciò ci limitiamo a considerarne la componente x : indichiamo con E_1 il campo nel dielettrico e con E_2 campo nel vuoto (nel conduttore il campo è nullo). Poniamo $x = 0$ sulla superficie di contatto tra dielettrico e conduttore.



Dall'equazione $\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho_{\text{lib}}$ ricaviamo la discontinuità di εE alla superficie $x = 0$ e la sua continuità alla superficie $x = h$

$$\varepsilon E_1 = \sigma, \quad \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon E_1, \quad (6)$$

la cui risoluzione dà: $E_1 = \sigma/\varepsilon$, $E_2 = \sigma/\varepsilon_0$.

b) Indicando con σ_{p-} e con σ_{p+} , rispettivamente, le densità di cariche di polarizzazione sulle superfici $x = 0$ e $x = h$, dalla conoscenza del campo elettrico e dal teorema di Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ applicato alle due superfici ricaviamo

$$\varepsilon_0 E_1 = \sigma + \sigma_{p-}, \quad \varepsilon_0 (E_2 - E_1) = \sigma_{p+}, \quad (7)$$

da cui, ricordando che $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$,

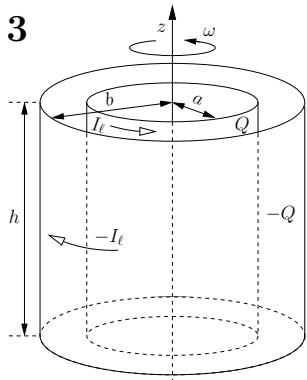
$$\sigma_{p+} = -\sigma_{p-} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \sigma = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma. \quad (8)$$

c) Nella regione di vuoto tra conduttore e dielettrico il campo vale $E_0 = \sigma/\varepsilon_0 = E_2$ e non dipende da s . All'interno del dielettrico e nella regione soprastante i campi non vengono modificati rispetto al caso precedente e quindi in particolare non dipendono da s .

L'energia elettrostatica del sistema non dipende da s come si deduce facilmente scrivendo l'energia come integrale di volume di $\varepsilon E^2/2$: il contributo all'integrale della regione occupata dal dielettrico non cambia in quanto sono costanti sia il volume del dielettrico che il campo al suo interno, e identica considerazione vale per la regione di vuoto in quanto il campo ha lo stesso valore sopra e sotto il dielettrico.

Poiché l'energia non dipende dallo spostamento s ne deduciamo che la forza è nulla, come ci si può aspettare dall'antisimmetria nella distribuzione dei campi e delle cariche sul dielettrico in funzione di x .

3



a) Fissiamo che la carica sia positiva ($Q > 0$) sull'armatura interna e negativa ($-Q$) sull'armatura esterna, e che per la velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$ sia $\omega > 0$. L'intensità della corrente generata dalla rotazione per unità di lunghezza è $\pm I_l$ rispettivamente per la corrente sulla superficie interna e sulla superficie esterna, dove

$$I_l = \frac{Q}{Th}. \quad (9)$$

Notare che I_l non dipende da a o b . Tali correnti per unità di lunghezza sono equivalenti alla corrente superficiale di un solenoide (nI). La corrente dell'armatura esterna genera il campo $\mathbf{B}_b = -\mu_0 I_l \hat{\mathbf{z}}$ nella regione $r < b$ e $\mathbf{B}_b = 0$ per $r > b$. La corrente dell'armatura interna genera $\mathbf{B}_a = -\mathbf{B}_b$ nella regione $r < a$ e $\mathbf{B}_a = 0$ per $r > a$. Per sovrapposizione otteniamo il campo totale $\mathbf{B} = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b$ dato da

$$\mathbf{B} = \begin{cases} -\mu_0 I_l \hat{\mathbf{z}} = -\frac{\mu_0 Q}{Th} \hat{\mathbf{z}} & (a < r < b), \\ 0 & (r < a, r > b). \end{cases} \quad (10)$$

b) Il campo elettrico tra le armature è diretto lungo $\hat{\mathbf{r}}$ (cioè $E_r > 0$) e tende ad avvicinare le armature (cariche opposte si attraggono). Il termine $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (con $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ la velocità di trascinamento) è invece negativo e tende ad allontanare le armature (correnti opposte si respingono).

Sulle due superfici $E = \sigma/\varepsilon_0$ dove $\sigma = Q/(2\pi rh)$ (con $r = a$ oppure b) è la densità superficiale di carica. Inoltre $|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = r\omega B = \mu_0\sigma(2\pi r/T)^2$. Quindi

$$\frac{E}{|\mathbf{v} \times \mathbf{B}|} = [\varepsilon_0\mu_0\sigma(2\pi r/T)^2]^{-1} = (cT/2\pi r)^2 \quad (11)$$

con $r = a$ oppure b . In ogni caso realistico il termine magnetico è estremamente piccolo rispetto al termine elettrico.