

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2015-2016

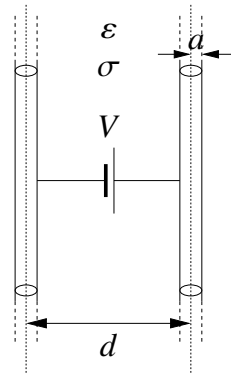
Compito di Fisica 2 (07/12/2016)

1

Due fili conduttori di raggio a , paralleli e infiniti, sono immersi in un mezzo avente permittività dielettrica ε e conducibilità σ . Tra i fili viene mantenuta la differenza di potenziale costante V . La distanza tra i fili è $d \gg a$ ed effetti di induzione elettrostatica sono trascurabili.

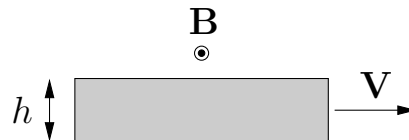
Calcolare le seguenti quantità (definite per unità di lunghezza):

- a) la carica su ogni filo e la capacità del sistema,
- b) la forza su ogni filo,
- c) la corrente totale I che passa tra i fili e la resistenza $R = V/I$.



2

Una lastra conduttrice di spessore h è mantenuta in moto con velocità $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ come in figura in un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{y}}$ perpendicolare a $\mathbf{V}$ e allo spessore. Gli effetti di bordo sono trascurabili.



- a) In condizioni stazionarie, calcolare il campo elettrico nella lastra e la densità di carica superficiale. Si diano stime numeriche per $V = 100$ m/s e $B_0 = 1$ T.

La lastra viene fermata in un tempo trascurabile a $t = 0$.

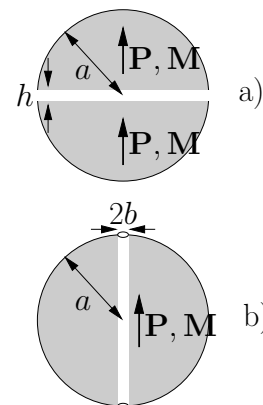
- b) Supponendo che la resistività della lastra sia ρ , calcolare l'evoluzione temporale della carica superficiale (si può, in questo calcolo, trascurare l'effetto del campo magnetico $\mathbf{B}_0$; è facoltativo discutere questa approssimazione).

3

Una sfera di raggio a ha una polarizzazione permanente e uniforme. Nel seguito si considerano sia il caso di polarizzazione elettrica ($\mathbf{P}$) che magnetica ($\mathbf{M}$).

- a) Dalla sfera si rimuove una “fetta” di raggio $\simeq a$ altezza $h \ll a$, con basi perpendicolari alla polarizzazione, intorno all’equatore come in Fig. a). Calcolare, nei casi rispettivamente di polarizzazione elettrica e magnetica, il campo elettrico o il campo magnetico al centro della sfera, discutendo le approssimazioni fatte nel calcolo.

- b) Si proceda come in a) se dalla sfera si rimuove un cilindro sottile di raggio $b \ll a$ e altezza $2a$, come in Fig. b), con asse parallelo alla magnetizzazione.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 . \quad (1)$$

Equazione di continuità (ρ : densità di carica, $\mathbf{J}$: densità di corrente)

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} . \quad (2)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (3)$$

Campo in un solenoide infinito orientato lungo l'asse z , avente n spire per unità di lunghezza nelle quali scorre l'intensità di corrente I

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} . \quad (4)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{D} \equiv \varepsilon \mathbf{E}) . \quad (5)$$

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$ in assenza di cariche "libere"

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} . \quad (6)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ in assenza di correnti "libere"

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \equiv \nabla \times \mathbf{H} = 0 , \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} . \quad (7)$$

Campo elettrico interno a una sfera con polarizzazione elettrica uniforme $\mathbf{P}$

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} . \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) Entro le nostre approssimazioni, ogni filo genera un campo elettrico $\mathbf{E} = \pm \hat{\mathbf{r}}\lambda/(2\pi\epsilon_0 r)$, dove $\mathbf{r}$ è la distanza del punto in cui si calcola il campo dal filo che lo genera, e la densità lineare di carica del filo è $\pm\lambda$ a seconda del polo del generatore cui il filo è connesso. Il contributo al potenziale elettrico di ogni filo è $V_i = -\lambda(2\pi\epsilon_0) \ln(r/r_0)$, dove r_0 è una costante arbitraria. Il contributo del filo positivo alla differenza di potenziale tra i due fili è

$$V_+ \simeq -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln a + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln d = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \left(\frac{d}{a} \right) \quad (9)$$

da cui

$$V \simeq 2\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \left(\frac{d}{a} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_r V}{\ln(d/a)} . \quad (10)$$

La capacità per unità di lunghezza è

$$C_l = \frac{\lambda}{V} = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(d/a)} . \quad (11)$$

b) La forza (attrattiva) per unità di lunghezza è data da λ per il campo generato da un filo sull'altro

$$F_l = \lambda E(d) = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r d} = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon_r V^2}{2d \ln^2(d/a)} . \quad (12)$$

c) Il campo elettrico generato da ogni filo alla propria superficie è

$$E(a) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r a} \gg \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r d} , \quad (13)$$

data la condizione $d \gg a$, il contributo dell'altro filo può quindi essere trascurato. La corrente per unità di lunghezza che lascia (o arriva su) ogni filo è quindi

$$I_l \simeq \sigma 2\pi a \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r a} = \frac{\sigma\lambda}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{\pi\sigma}{\ln(d/a)} V , \quad (14)$$

da cui

$$R = \frac{V}{I_l} = \frac{\ln(d/a)}{\pi\sigma} , \quad (15)$$

dove R è, in realtà, l'inverso della conduttanza per unità di lunghezza.

Lo stesso risultato può essere ottenuto più in generale prendendo una qualunque superficie chiusa S che racchiuda un tratto di lunghezza unitaria di uno dei due fili. La corrente tra i due fili è ovviamente uguale alla corrente che passa attraverso tale superficie ed è data da

$$I_l = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma \frac{Q_S}{\epsilon} , \quad (16)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema di Gauss; Q_s è la carica contenuta nella superficie chiusa, ovvero la carica localizzata sul tratto di filo di lunghezza unitaria. Poiché $Q_s = C_l V$ per definizione, usando la (11) si ottiene di nuovo la (15).

2

a) Nella lastra gli elettroni di conduzione sono sottoposti a una forza magnetica $\mathbf{F}_m = -e\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0 = -eVB_0\hat{\mathbf{z}}$ che induce, in sequenza, una densità di corrente e l'accumulo di densità di carica sulle superfici con generazione di un campo elettrico $\mathbf{E}_i = E_i\hat{\mathbf{z}}$ con $E_i = \sigma/\varepsilon_0$. In condizioni stazionarie deve essere $\mathbf{E}_i + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0 = 0$ da cui $E_i = VB_0$ e $\sigma = \varepsilon_0VB_0$. Numericamente $E_i = 100 \text{ N/C}$ e $\sigma = 8.85 \times 10^{-10} \text{ C/m}^2$.

b) L'arresto della lastra annulla istantaneamente il termine di forza magnetico e gli elettroni si muovono sotto l'azione del campo elettrico per ristabilire la neutralità locale di carica. Al tempo t , la densità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{E}_i/\rho$ dove $E_i = E_i(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$. Per l'equazione di continuità si ha $J = -\partial_t\sigma$ da cui otteniamo $\partial_t\sigma = -\sigma/\rho\varepsilon_0$ che ha soluzione

$$\sigma(t) = \sigma(0)e^{-t/\rho\varepsilon_0} = \varepsilon_0VB_0e^{-t/\rho\varepsilon_0}. \quad (17)$$

La corrente è prodotta da elettroni che si muovono con velocità di deriva $\mathbf{v}_d = -\mathbf{J}/(en_e)$ con $v_d \sim 1 \text{ cm/s} \sim 10^{-4}V$. Se $v_d \ll V$, si ha $E_i \gg v_dB_0$ quindi l'effetto del campo magnetico sul moto è trascurabile. Altrimenti, si dovrebbe tener conto che lo spostamento degli elettroni in direzione $\hat{\mathbf{x}}$ indotto dal campo $\mathbf{B}_0$ induce un campo di Hall che all'equilibrio varrebbe $\mathbf{E}_H = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}_0$. Il tempo con cui si forma il campo di Hall è però dell'ordine del tempo di scarica, cioè del decadimento di $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{v}_d$ e quindi una soluzione completa richiede lo scrivere equazioni simili alle precedenti per il campo $\mathbf{E}_H$ e il moto lungo $\hat{\mathbf{x}}$.

3

a) Se non togliamo la “fetta”, il campo all'interno della sfera è $E_{\text{int}} = -\mathbf{P}/(3\varepsilon_0)$, mentre il campo all'esterno è quello di un dipolo di momento $\mathbf{p} = \mathbf{P}(4\pi a^3/3)$ localizzato al centro della sfera. Togliendo la fetta, la cavità che rimane si comporta come un condensatore con densità di carica $\sigma = \pm P$, quindi con carica $Q \simeq \pi a^2 P$ e capacità $C = \varepsilon_0\pi a^2/h$. La differenza di potenziale tra le due superfici del taglio è $V = Q/C = Ph/\varepsilon_0$, mentre il campo generato dal “condensatore”, nullo fuori dal “condensatore” stesso, vale $E_{\text{cond}} = P/\varepsilon_0$ tra le due superfici. Tra le due superfici di taglio il campo complessivo vale quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{int}} + \mathbf{E}_{\text{cond}} = \frac{2}{3} \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \quad (18)$$

Allo stesso risultato si può giungere ricordando la continuità della componente perpendicolare di $\mathbf{D}$. Nella sfera abbiamo infatti

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = -\frac{\mathbf{P}}{3} + \mathbf{P} = \frac{2}{3}\mathbf{P} \quad (19)$$

Nel caso di una sfera uniformemente magnetizzata, con magnetizzazione $\mathbf{M}$, senza taglio, dalla analogia formale tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ abbiamo $\mathbf{H}_{\text{int}} = -\mathbf{M}/3$, mentre per $\mathbf{B}$ all'interno della sfera abbiamo

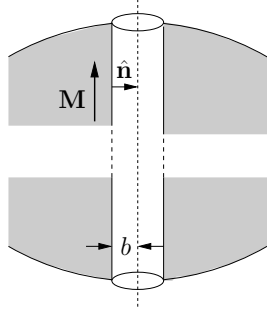
$$\mathbf{B}_{\text{int}} = \mu_0(\mathbf{H}_{\text{int}} + \mathbf{M}) = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}. \quad (20)$$

Fuori dalla sfera $\mathbf{B}$ è quello generato da un dipolo magnetico al centro della sfera, di momento $\mathbf{m} = \mathbf{M}(4\pi a^3/3)$.

Togliendo la “fetta”, si conserva la componente perpendicolare di $\mathbf{B}$, quindi $\mathbf{B}$ resta uniforme su tutto il volume della sfera. Allo stesso risultato si arriva osservando che nel limite $h/a \rightarrow 0$ il

campo $\mathbf{B}$ è nullo al centro della fetta. Una stima più precisa può essere fatta considerando che la fetta è assimilabile a una spira percorsa dalla corrente $I = Mh$ che genera al centro un campo $B = (\mu_0 M/2)(h/a) \ll \mu_0 M$.

b)



Nel caso della sfera magnetizzata, abbiamo la continuità della componente parallela di $\mathbf{H}$, che quindi vale $\mathbf{H}_{\text{int}} = -\mathbf{M}/3$ anche all'interno del cilindretto cavo. Nel cilindretto avremo quindi

$$\mathbf{B}_{\text{cil}} = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{int}} = -\mu_0 \frac{\mathbf{M}}{3} . \quad (21)$$

Allo stesso risultato si può giungere ricordando che la presenza di una corrente superficiale di magnetizzazione $\mathbf{K}_m = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$, dove il versore $\hat{\mathbf{n}}$ è diretto come in figura. Il buco cilindrico è quindi equivalente a un solenoide con $nI \rightarrow K_m$,

che produce un campo

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{M} . \quad (22)$$

Analogamente, se togliamo il cilindretto di raggio b dalla sfera polarizzata elettricamente, si conserva la componente parallela di $\mathbf{E}$, ed $\mathbf{E}$ rimane uniforme su tutto il volume della sfera. In altri termini il campo elettrico è nullo all'interno di un cilindro uniformemente polarizzato nel limite $a/h \rightarrow 0$. Questo lo si può dedurre considerando che il campo è generato dalle cariche di polarizzazioni sulle basi del cilindro che in questo limite sono infinitamente lontane dal centro. In effetti considerando le basi, viste a grande distanza, come cariche puntiformi $\pm q = \pm P(\pi a^2)$, il campo al centro può essere stimato come $E \simeq 2k_0 q / (h/2)^2 = 8\pi k_0 P (a/h)^2 = (2P/\varepsilon_0)(a/h)^2 \ll P/\varepsilon_0$.